南山大学紀要『アカデミア』理工学編　第17巻，　8-13，　2017年3月

非２重連結性遺伝２部グラフの変型ガロア束のサイズについて

大月 英明 *

概 要

我々は一般の２部グラフに対して変形ガロア束を定義し，距離遺伝２部グラフに対し，２部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることを示した．非２重連結性遺伝２部グラフクラスとは，ドミノフリーグラフクラスと距離遺伝２部グラフの両方と交差するグラフクラスである．ここでは頂点数 $n\,(\geq 3)$ の非２重連結性遺伝２部グラフ B に対する変形ガロア束 $G_m(B)$ のサイズを評価する．具体的には $G_m(B)$ の頂点数と辺数は，それぞれ $3n/2+1$ 未満と $5n/2-2$ 未満であることを示す．

1　はじめに

一般の２部グラフに関して，その２部クリーク辺被覆問題は NP 困難問題であることが知られている [3] [5]．しかし，C_4 フリーグラフ，距離遺伝２部グラフ [4] やドミノフリーグラフ [1]，さらに路重複数 $R(B) \leq 1$ [6] の２部グラフの場合は，最小２部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることが示されている．ドミノフリーグラフ，及び路重複数 $R(B) \leq 1$ の２部グラフに対する多項式時間アルゴリズムは，B の極大２部クリーク集合の束を用いているため，この束のサイズが計算時間に影響する．

頂点数 $n\,(\geq 2)$ の距離遺伝２部グラフ B の極大２部クリークの数は，高々 $n-1$ であることが示されている [2]．一方，論文 [6] では，変形ガロア束 $G_m(B)$ が導入され，頂点数 $n\,(\geq 2)$ の距離遺伝２部グラフ B の $G_m(B)$ の頂点数は，高々 $3n/2+1$ であることが証明された [7]．ここでは，B が頂点数 $n\,(\geq 3)$ の連結な非２重連結性遺伝グラフのとき，論文 [6] で導入された，変形ガロア束 $G_m(B)$ のサイズについて評価する．具体的には $G_m(B)$ の頂点数は $3n/2+1$ 未満であり，辺数は $5n/2-2$ 未満であることを示す．

2　定義

ここで取り扱うグラフはすべて２部グラフである．$B = (X_B, Y_B, E_B)$ を，頂点集合 $X_B \cup Y_B$ と辺集合 $E_B \subseteq X_B \times Y_B$ からなる２部グラフとす

*南山大学理工学部ソフトウェア工学科

る．$X_B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_x}\}$，$Y_B = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n_y}\}$ とし，$n = n_x + n_y$，$m = |E_B|$ とする．頂点 $v \in X_B \cup Y_B$ の B における隣接頂点の集合を $N_B(v)$ と表記する．B の部分グラフ $K = (X_K, Y_K, X_K \times Y_K)$ を（B の）2 部クリークと呼ぶ．$E_B = \bigcup_{i=1}^{s} E_{K_i}$ なる B の 2 部クリークの集合 $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_s\}$ を B の 2 部クリーク辺被覆と呼ぶ．最小 2 部クリーク辺被覆問題は，最小サイズの 2 部クリーク辺被覆を求める問題である．

K が B の極大 2 部クリークであるとは，B の 2 部クリーク $K'(\neq K)$ で，$E_K \subseteq E_{K'}$ を満たすものが存在しないときをいう．$|X_K| = 1$ または $|Y_K| = 1$ のとき，K は星グラフである．$|X_K| = 1$ のとき，$x \in X_K$ を星グラフ K の中心と呼ぶ．$|Y_K| = 1$ のときも同様である．$x_i \in X_B$ に対して，x_i を中心とする極大星グラフを X_i と表す． 同様に $y_j \in Y_B$ に対して y_j を中心とする極大星グラフを Y_j と表す．

B を連結な 2 部グラフとする．B の頂点 v に対し，頂点集合 $V(B) \setminus \{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B^v と表記する．つまり B^v は，B から頂点 v とそこに接続する辺を除去したグラフである．

グラフ B の関節点とは，B^v が非連結になるような頂点 v である．2 重連結なグラフとは，関節点を持たないグラフである．ここで非 2 重連結性遺伝 2 部グラフを次のように定義する．

定義 1. 関節点 v をもつ 2 部グラフを B とする． B^v の連結成分を，$B_1^v, \ldots, B_c^v\,(c \geq 2)$ とする．それぞれの $B_i\,(i = 1, \ldots, c)$ が関節点を持つグラフか，または頂点数 2 のグラフであるとき，v を非 2 重連結性を遺伝する頂点という．$B_i\,(i = 1, \ldots, c)$ のうち，頂点数 2 のグラフでないものがすべて非 2 重連結性を遺伝する頂点を持つならば，B を非 2 重連結性遺伝 2 部グラフという．

1 つの頂点を共有するような，2 つの C_6 からなるグラフは非 2 重連結性遺伝 2 部グラフであるが，距離遺伝 2 部グラフではない．つまり非 2 重連結性遺伝 2 部グラフクラスは，距離遺伝 2 部グラフクラスのサブクラスではない．また，次数 3 の頂点を一つだけ共有するような，2 つのドミノからなるグラフは非 2 重連結性遺伝 2 部グラフであるが，ドミノフリーグラフではない．つまり非 2 重連結性遺伝 2 部グラフクラスは，ドミノフリーグラフクラスのサブクラスではない．また $K_{2,2}$ は，ドミノフリーであり距離遺伝 2 部グラフであるが，非 2 重連結性遺伝 2 部グラフではない．すなわち非 2 重連結性遺伝 2 部グラフクラスは，ドミノフリーグラフクラスと距離遺伝 2 部グラフの両方と交差するグラフクラスである．

3 変型ガロア束 $G_m(B)$

$\mathcal{K}_M(B) = \{K_1, K_2, \ldots, K_s\}$ を 2 部グラフ B のすべての極大 2 部クリークからなる集合とする．$\mathcal{K}_M(B)$ 上に，半順序 $<$ を以下のように定義する．

$K_p, K_q \in \mathcal{K}_M(B)$ に対し，$Y_{K_p} \subset Y_{K_q}$ のとき，またそのときに限り $K_p < K_q$ であるとする．さらに，$\mathcal{K}_M(B)$ のすべての要素 K に対して，$K < \top$ であるような要素 $\top$ と，$\perp < K$ であるような要素 $\perp$ を加え，$\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \perp\}$ のハッセ図を $G(B)$ とする．つまり，$G(B)$ は $\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \perp\}$ の要素を頂点とし，$K_p < K_q$ でかつ，$K_p < K_m < K_q$ なる K_m が存在しないときに，K_q から K_p に向う有向辺を置いたグラフである．$G(B)$ を B のガロア束と呼ぶ [1]．Amilhastre et al. [1] は，ドミノフリーグラフの 2 部クリーク辺被覆問題，および 2 部クリーク分割問題に対し，ガロア束を用いた多項式時間アルゴリズムを与えた．

Otsuki and Hirata[6] は，ガロア束を拡張した変形ガロア束を定義し，ドミノフリーグラフを真に含むグラフクラスに対し，2 部クリーク辺被覆問題の多項式時間アルゴリズムを与えた．変形ガロア束 $G_m(B)$ は 2 部グラフ B から以下のように定義される．$\mathcal{X}_s(B) = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n_x}\}$，$\mathcal{Y}_s(B) = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_y}\}$ とする．B の部分グラフの集合 $\mathcal{K}^s_M(B) \equiv \mathcal{K}_M(B) \cup \mathcal{X}_s(B) \cup \mathcal{Y}_s(B)$ 上に，半順序 $<$ を以下のように定義する．$K_p, K_q \in \mathcal{K}^s_M(B)$ に対し，$Y_{K_p} \subseteq Y_{K_q}$ かつ $X_{K_q} \subseteq X_{K_p}$ のとき，かつその時に限り $K_p < K_q$ とする．$\mathcal{K}^s_M(B)$ のすべての要素 K に対して，$K < \top$ であるような要素 $\top$ と，$\perp < K$ であるような要素 $\perp$ を加えた集合 $\mathcal{K}^s_M(B) \cup \{\top, \perp\}$ のハッセ図を $G_m(B)$ とする．$G_m(B)$ を B の変形ガロア束と呼ぶ．

4 非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ B に対する $G_m(B)$ のサイズ

ここでは，非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ B に対する B について，その変型ガロア束 $G_m(B)$ のサイズを評価する．具体的には B の頂点数を n としたとき，$|V(G_m(B))| < 3n/2 + 1$ であることを証明する．ここで $\mathcal{M}(B) \equiv \mathcal{K}^s_M(B) \setminus \{\mathcal{X}_s(B) \cup \mathcal{Y}_s(B)\}$ とする．$|V(G_m(B))| = |\mathcal{M}(B)| + n + 2$ なので，以下では $|\mathcal{M}(B)| < n/2 - 1$ を示す．

まず，次の補題を証明する．

補題 2. v を B の関節点とし，B^v の連結成分を $B^v_1, \ldots, B^v_c$ とする．頂点集合 $V(B^v_i) \cup \{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B_i とする．このとき $K \in \mathcal{M}(B)$ は，いずれかの B_i の極大 2 部クリークである．

証明. $v \notin V_K$ の場合は明らかであるので，以下では $v \in V_K$ とする．もし K が，サブグラフとしていずれの B_i にも含まれないならば，V_K をすべて含む B_i は存在しない．すなわち，ある 2 頂点 $u_i, u_j \in V_K$ に関して，$u_i \in V(B_i)$ かつ $u_j \in V(B_j)$ なる $j\,(\neq i)$ が存在する．これは B_i と B_j が非連結であることに反する．したがって K は，いずれかの B_i のサブグラフである．

K が B の極大２部クリークであれば，K は B_i の極大２部クリークである． □

定理 3. 頂点数 $n\,(\geq 3)$ の非２重連結性遺伝２部グラフ B に対して $|\mathcal{M}(B)| < n/2-1$ が成り立つ．

証明. B の頂点数 n に関する帰納法により証明する．定義より $n=2$ の非２重連結性遺伝２部グラフは存在しない．$n=3$ のとき，B は，$K_{1,2}$ である．よって $\mathcal{M}(B)=\emptyset$ であり，$|\mathcal{M}(B)|=0$ なので $|\mathcal{M}(B)|<n/2-1$ が成り立つ．

$n=k\,(\geq 3)$ のときに定理が成り立つと仮定する．B を $n=|V(B)|=k+1$ なる非２重連結性遺伝２部グラフとする．まず v が B の非２重連結性を遺伝する関節点であるとする．B^v の連結成分を $B_1^v,\ldots,B_c^v$ とする．頂点集合 $V(B_i^v)\cup\{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B_i とし，$n_i\equiv|V(B_i)|$ とする．非２重連結性遺伝２部グラフの定義から，各 $B_i\,(1\leq i\leq c)$ は非２重連結性遺伝２部グラフであるか，または頂点数 2 のグラフである．補題 2 より $|\mathcal{M}(B)|=\sum_{i=1}^{c}|\mathcal{M}(B_i)|$ である．$|V(B_i)|\leq k$ なので，帰納法の仮定より $|\mathcal{M}(B)|=\sum_{i=1}^{c}|\mathcal{M}(B_i)|<\sum_{i=1}^{c}(n_i/2-1)$ である．$\sum_{i=1}^{c}n_i=k+c$ より，$|\mathcal{M}(B)|<(k+c)/2-c=(k+1)/2-(1+c)/2$ となる．したがって $c\geq 2$ より，$|\mathcal{M}(B)|<(k+1)/2-3/2$ すなわち $|\mathcal{M}(B)|<(k+1)/2-1$ となり，定理が成り立つ．

□

定理 3 の議論より，以下の系が成り立つ．

系 4. 非２重連結性遺伝２部グラフ B が c 個の連結成分を持つ場合，$|M(B)|\leq n/2-c$ である

$|V(G_m(B))|=|\mathcal{M}(B)|+n+2$ より，以下の系が成り立つ．

系 5. 頂点数 $n\,(\geq 3)$ の連結な非２重連結性遺伝２部グラフ B に対して $|V(G_m(B))|<3n/2+1$ が成り立つ.

$G_m(B)$ の辺の数に対しては，次の定理が成り立つ．

定理 6. 頂点数 $n\,(\geq 3)$ の連結な非２重連結性遺伝２部グラフ B に対して $|E(G_m(B))|<5n/2-2$ が成り立つ.

証明. B の頂点数 n に関する帰納法により証明する．$G_m(B)$ から $\top$ と $\bot$ を取り除いた グラフを $G'_m(B)$ とする．$G'_m(B)$ に対し，$|E(G'_m(B)|\leq 3n/2-2$ を証明する．定義より $n=2$ の非２重連結性遺伝２部グラフは存在しない．$n=3$ のとき，B は，$K_{1,2}$ であり $|E(G'_m(B))|=2$ なので，定理が成り立つ．

次に $n=k\,(\geq 3)$ のときに定理が成り立つと仮定する．B を $n=|V(B)|=k+1$ なる非２重連結性遺伝２部グラフとする．非２重連結性を遺伝する頂点を

$v \in V(B)$ とする．B^v の連結成分を $B_1^v, \ldots, B_c^v$ とする．頂点集合 $V(B_i^v) \cup \{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B_i とし，$n_i \equiv |V(B_i)|$ とする．非 2 重連結性遺伝 2 部グラフの定義から，$B_i\,(1 \leq i \leq c)$ は非 2 重連結性遺伝 2 部グラフである．したがって $|E(G'_m(B))| = \sum_{i=1}^{c} |E(G'_m(B_i))|$ が成り立つ．$|V(B_i)| \leq k$ なので，帰納法の仮定より $|E(G'_m(B))| = \sum_{i=1}^{c} |E(G'_m(B_i))| < \sum_{i=1}^{c}(3n_i/2-2)$ が成り立つ．$\sum_{i=1}^{c} n_i = k + c$ より，$|E(G'_m(B))| < 3(k+c)/2 - 2c = 3(k+1)/2 - (3+c)/2$ が成り立つ．したがって $c \geq 2$ より，$|E(G'_m(B))| < 3(k+1)/2 - 5/2$ すなわち $|E(G'_m(B))| < 3(k+1)/2 - 2$ であり，定理が成り立つ．

□

$|E(G_m(B))| = n + |E(G'_m(B))|$ より，以下の系が成り立つ．

系 7. 頂点数 $n\,(> 3)$ の連結な非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ B に対して $|E(G_m(B))| < 5n/2 - 2$ が成り立つ.

5 おわりに

われわれは、非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ B に対して，その変形ガロア束 $G_m(B)$ のサイズを評価を評価した．ここでは，非 2 重連結性遺伝 2 部グラフクラスが，2 部クリーク辺被覆問題を多項式時間で解くことができるような，新しいグラフクラスであることが示された．一方，距離遺伝 2 部グラフ B に対しての結果 [7] より，関節点 v を持つ 2 部グラフ B に対する B^v の連結成分のうち，少なくとも一つが距離遺伝 2 部グラフである場合も同様の結果が得られる．そのようなグラフは 2 重連結性遺伝 2 部グラフクラスを含むような新たなグラフクラスに属する．このようなグラフクラスの自然な特徴付けに対しては今後の課題としたい．

参考文献

[1] J. Amilhastre, M. C. Vilarem, and P. Janssen. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs. *Discrete Appl. Math.*, Vol. 86, No. 2-3, pp. 125–144, 1998.

[2] N. Apollonio and P. G. Franciosa. On computing the galois lattice of bipartite distance hereditary graphs. *arXiv preprint arXiv:1510.06883*, 2015.

[3] H. Fleischner, E. Mujuni, D. Paulusma, and S. Szeider. Covering graphs with few complete bipartite subgraphs. *Theoretical Computer Science*, Vol. 410, No. 21 - 23, pp. 2045 – 2053, 2009.

[4] H. Múller. On edge perfectness and classes of bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 149, No. 1 - 3, pp. 159 – 187, 1996.

[5] J. Orlin. Contentment in graph theory: covering graphs with clique. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, Vol. 80, No. 5, pp. 406 – 424, 1977.

[6] H. Otsuki and T. Hirata. The biclique cover problem and the modified Galois lattice. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, Vol. 98, No. 3, pp. 497–502, 2015.

[7] 大月英明, 平田富夫. 距離遺伝 2 部グラフの変型ガロア束のサイズについて. アルゴリズム研究会研究報告, Vol. 157, No. 6, pp. 1 – 5, 2016.