

シーケントによる証明の構想の図式化

佐々木克巳（南山大学理工学部）

概要

本稿は、証明活動における証明の構想を表現する図式について考察する。証明の図式は、フローチャートの他に、Gentzen [1] が与えた形式体系 **LK** における証明図が知られている。その証明図では、「証明をシーケントの変化としてとらえる」という考え方を基本としている。佐々木 [4] は、この考え方が証明の構想の図式化に適していることを示し、体系 **LK** の証明図にフローチャートのよさを加える形で、証明の構想を表現する図式を導入した。本稿は、その図式をさらに実際の証明の構想に近い形に整えた **LKP** 構想図を導入し、そのよさを、実際の証明の構想を **LKP** 構想図で表現することで示す。

1 はじめに

証明の構想は、学校教育における証明活動の4つの相、すなわち、問題の理解、証明の構想、証明の構成、振り返りのうちの1つとして位置付けられている(辻山 [5] など)。本稿は、この証明の構想の図式について考察する。この証明の構想を図式化できると、その構想を効率的に行えるだけでなく、証明活動における、証明の構成や振り返りにおいて、証明の構想の結果や過程を検討・評価するときにも役立てられる。

証明活動において、証明の構想の結果や過程を検討・評価する必要性は、たとえば、[5] で、『4つの相に関わる活動は、一連の問題解決の過程で繰り返し現れる。そして、振り返りでは、解決の結果や過程を検討し、誤りや不十分さを明らかにすることに加えて、解決の結果や過程で用いた方法を他の問題の解決に利用するなど、結果や過程を評価することを含む (Pólya[3]pp. 14–16)』と説明されている¹。

また、以下の例に示すように、フローチャートなどの証明の筋道を表す図式は、証明の構想の図式としては不十分である（この例は、[4] でも紹介されている）。

例 1.1 次の問題の証明の構想を2つ考える。

問題. 図1の四角形 $ABCD$ が $AB=AD$, $CB=CD$ を満たすとき、 $\angle ABC = \angle ADC$ を証明せよ。

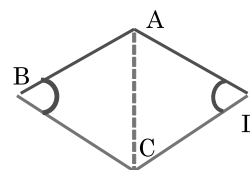


図 1: 例 1.1 の図

構想 1

(1) $\angle ABC = \angle ADC$ を示すには、 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ を示せばよい。

¹ここでいう「4つの相」とは、厳密には、[3]における一般的な問題解決の過程の相で、具体的には、問題の理解、解決の構想、解決の実行、振り返りのことである。[5]は、この問題解決における相と証明活動の相を関連付けて述べており、2種類の各相を対応させることができる。

(2) (1) の合同を示すには、3組の辺がそれぞれ等しいことを示せばよい。

(3) (2) の3組のうち、2組の辺は仮定からそれぞれ等しく、残り1組は共通辺なので等しい。

構想 2

(1) 2つの仮定から、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ の2組の辺がそれぞれ等しいので、残り1組の辺が等しければ合同がいえる（使える性質に加えられる）。

(2) 残り1組の辺は共通辺なので等しく、(1) の2つの三角形は合同である。

(3) (2) の結果から、 $\angle ABC = \angle ADC$ である。

構想 1 は結論から逆方向に進める構想で解析的方法と呼ばれている、一方、構想 2 は仮定から順方向に進める構想で総合的方法と呼ばれている。2つの構想は異なるが、それらから構成される証明の筋道は同じで、フローチャート

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD(\text{仮定}) \\ CB = CD(\text{仮定}) \\ AC = AC(\text{共通辺}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$$

で表現される。そして、このフローチャートからは、もともなった構想の過程を読み取ることはできない（構想 1 か、構想 2 か、あるいは別の構想かを区別できない）。

つまり、本稿の対象とする図式は、証明の構想、そのものの図式である。この証明の構想の図式化に対して、[4] は、その図式化に「証明をシークエントの変化としてとらえる」という考え方が適していることを示した。そして、その考え方を基本とした体系 **LK** の証明図にフローチャートのよさを加える形で、証明の構想を表現する図式を導入した。本稿は、その図式をさらに実際の証明の構想に近い形に整えた **LKP** 構想図を導入し、そのよさを、実際の証明の構想を **LKP** 構想図で表現することで示す。

具体的には、まず、次の2節で、シークエントの変化が証明の構想を表現するのに適していることを確認する。3節では、[4] でフローチャートのよさを加えた要因、すなわち、シークエントの変化だけでは証明の構想を表現するのに不十分な部分を明らかにし、その不十分な部分を補うための新しいシークエント（波線付きシークエント）を導入する。4節では、波線付きシークエントを用いて、証明の構想を表現する図式（**LKP** 構想図）を導入する。この **LKP** 構想図は、[4] の図式よりも実際の証明に近い形になっており、実際の証明の構想を忠実に表現できる。5節では、この **LKP** 構想図のよさを、実際の証明の構想を表現した例を挙げることで示す。

2 シークエントの変化と証明の構想

この節では、シークエントを導入し、その変化の過程を表す図式が証明の構想を表すのに適していることを述べる。具体的には、シークエントの変化を表す推論規則が、証明の構想の各ステップに対応することを述べる。

まず、シークエントを導入する。 $n+1$ 個の述語 P, P_1, \dots, P_n に対し、表現

$$P_1, \dots, P_n \Rightarrow P$$

をシークエントという（ $n=0, 1, 2, \dots$ ）。“ P_1, \dots, P_n ” をこのシークエントの左辺、 P を右辺という（ $n=0$ のとき、左辺は空列を表す）。シークエントの左辺において、述語の重複と順番は、異

なっているとしても区別しないとする．たとえば，次の3つのシークエント

$$P_1, P_2 \Rightarrow P \qquad P_1, P_1, P_2 \Rightarrow P \qquad P_2, P_1 \Rightarrow P$$

はすべて同じとみなす．シークエントの意味は，「左辺に現れる述語から右辺の述語が導かれる」である．証明の構想においては，左辺が「使える性質の列」，右辺は「導きたい性質」となる．

以後，述語を表すのに P, Q, R, P_1, P_2, \dots などの記号を用い，シークエントの左辺に現れる述語の有限列を表すのに， $\Gamma, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ などの記号を用いる．また，必要に応じて論理結合子（かつ，または，ならば，でない）と限定子（すべて，存在）を含む述語，および矛盾を，それぞれ表1のように表す．

表 1: 記号表現

P かつ Q	$P \wedge Q$
P または Q	$P \vee Q$
P ならば Q	$P \rightarrow Q$
P でない	$\neg P$
すべての x が P を満たす	$\forall x P$
P を満たす x が存在する	$\exists x P$
矛盾	\perp

次に，シークエントの変化を表す推論規則を導入し，推論規則が，証明の構想の各ステップに対応することを述べる．

n 個のシークエント S_1, \dots, S_n からシークエント S への変化を

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S} \qquad \text{または} \qquad \frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{\overline{\overline{S}}}$$

と表現し，これらの表現を推論規則という．各 S_i をそれぞれの推論規則の上式， S を下式という．どちらの推論規則も「上式から下式が導かれる」（つまり，「下式を示すには上式を示せばよい」）と解釈する．左（一重線）の表現は述語の変化で表現できる推論に，右（二重線）の表現はその変化で表現できない推論に用いる²．なお，上の2つの推論規則は， $n = 0$ のとき，

$$\overline{S} \qquad \overline{\overline{S}}$$

となる．

以下，例を挙げて，証明の構想の各ステップが推論規則で表現でき，証明の構想がシークエントの変化の過程で表現できることを述べる．

² 「述語の変化で表現できる」とは，より正確には，「上式を示す各証明のフローチャートに，述語と述語をつなぐ矢印を加えて下式を示す証明のフローチャートを構成できる」である．

例 2.1 例 1.1 の 2 つの構想は、推論規則を組み合わせた以下の図式で表現できる。

構想 1 の図式：

$$\frac{\frac{\frac{\uparrow \Rightarrow AB = AD}{(3)} \quad \frac{\uparrow \Rightarrow CB = CD}{(3)} \quad \frac{\uparrow \Rightarrow AC = AC}{(3)}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC} \quad (2)}{AB = AD, CB = CD \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC} \quad (1)$$

構想 2 の図式：

$$\frac{\frac{\uparrow \Rightarrow AC = AC}{(2)} \quad \frac{\triangle ABC = \triangle ADC, \uparrow \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC}{(3)}}{AB = AD, CB = CD \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC} \quad (1)$$

ただし、シークエントの左辺の記号“ \uparrow ”は「下式のシークエントの左辺と同じ列」を表す。どちらの図式においても、推論規則 (1),(2),(3) は例 1.1 の構想のステップ (1),(2),(3) に対応している。例 1.1 で、2 つの構想から得られる証明の筋道が同じフローチャートで表現されると述べたが、上の 2 つの図式では、それらが区別できていることがわかる。

3 シークエントと推論規則の拡張

前節では、推論規則が証明の構想のステップに対応していることを述べた。しかし、この推論規則からもとのステップで用いられた推論を読み取れないことがある。この節では、この例を挙げ、その対応として、シークエントと推論規則を波線付きの述語を用いた形に拡張する。

まず、例を挙げる。

例 3.1 証明の構想のあるステップで、シークエント $P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R$ が対象になったとする。このとき、2 つの推論

- (1) P と $P \rightarrow Q$ から Q が導かれる（ので、 Q, P, Γ から R を導けばよい）
- (2) P と $\neg P \vee Q$ から Q が導かれる（ので、 Q, P, Γ から R を導けばよい）

のどちらを用いても、その推論は、推論規則

$$\frac{Q, P, \Gamma \Rightarrow R}{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R}$$

で表される。つまり、上の推論規則から、もともなった推論がどちらなのかを読み取ることができない。

例 3.2 証明の構想のあるステップで、シークエント $P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q$ が対象になったとする。このとき、2 つの推論

- (1) P と $P \rightarrow Q$ から Q が導かれる（ので、 Γ から P を導けばよい）
- (2) P と $\neg P \vee Q$ から Q が導かれる（ので、 Γ から P を導けばよい）

のどちらを用いても、その推論は、推論規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P}{P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}$$

で表される。つまり、上の推論規則から、もともなった推論がどちらなのかを読み取ることができない。

例 3.3 証明の構想のあるステップで、シークエント $P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q$ が対象になったとする。このとき、2つの推論

(1) P と $P \rightarrow Q$ から Q が導かれる

(2) P と $\neg P \vee Q$ から Q が導かれる

のどちらを用いても、その推論は、推論規則

$$\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q \Rightarrow Q}$$

で表される。つまり、上の推論規則から、もともなった推論がどちらなのかを読み取ることができない。

上の3つの例の推論規則からも、もともなった推論が読み取れるよう、シークエントに現れるいくつかの述語の上または下に波線を引くことを考える³。結果として、上の3つの例に対しては、表2のように表現できるようにする。つまり、波線のついた推論規則から、もともなった推論が

$$(I1) \left. \begin{array}{l} \text{下式左辺で上に波線のついた述語} \\ \text{上式右辺で下に波線のついた述語} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{上式左辺で下に波線のついた述語}$$

または

$$(I2) \left. \begin{array}{l} \text{下式左辺で上に波線のついた述語} \\ \text{上式右辺で下に波線のついた述語} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{下式右辺で上に波線のついた述語}$$

であることが読み取れるようにする⁴。例 3.1 が (I1) の形で、例 3.2, 例 3.3 が (I2) の形である。

一般には、次のようにシークエントと推論規則の概念を拡張する。拡張された推論規則もともなる推論との対応は次節で **LKP** 構想図を定義するときに行う。

定義 3.4 シークエントに現れる述語の上（または下）に波線をひいた表現を波線付きシークエントといい、推論規則の上式と下式を波線付きシークエントで置きかえた表現を、波線付き推論規則という。波線付きシークエントに対しても、左辺、右辺ということばを用い、波線付き推論規則に対しても、上式、下式ということばを用いる。混乱のないときは、波線付きシークエントを単にシークエントといい、波線付き推論規則も単に推論規則という。

波線付きシークエントの左辺に P と \tilde{P} が現れるときは、 \tilde{P} が1回現れるときと同じとみなす。 P と \tilde{P} の場合も P と \tilde{P} と \tilde{P} の場合も同様である。たとえば、3つのシークエント

$$\tilde{P}, Q \Rightarrow R \quad \tilde{P}, P, Q \Rightarrow R \quad \tilde{P}, P, P, Q \Rightarrow R$$

はすべて同じとみなす。

³[4] では、推論規則に、もともなった推論を示す矢印を追記することで、このことを読み取れるようにした。結果として、その矢印が煩雑に交わることがあり、本稿では、波線をつける方法をとった。本質的には同じ考え方である。

⁴表2では、「上式右辺で下に波線のついた述語」は現れないが、一般的には、こうなるように波線をつける。

表 2: 波線を付けた推論規則

	(1) P と $P \rightarrow Q$ から Q が導かれる	(2) P と $\neg P \vee Q$ から Q が導かれる
例 3.1	$\frac{\overline{\overline{Q, P, \Gamma \Rightarrow R}}}{\overline{\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R}}} (1)$	$\frac{\overline{\overline{Q, P, \Gamma \Rightarrow R}}}{\overline{\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R}}} (2)$
例 3.2	$\frac{\overline{\overline{\Gamma \Rightarrow P}}}{\overline{\overline{P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}}} (1)$	$\frac{\overline{\overline{\Gamma \Rightarrow P}}}{\overline{\overline{P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}}} (2)$
例 3.3	$\overline{\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}} (1)$	$\overline{\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}} (2)$

4 LKP 構想図と LKP 証明図

この節では、前節の (波線付き) シークエントと (波線付き) 推論規則を用いて、証明の構想を表す図式である **LKP** 構想図、および、その構想が成功した形である **LKP** 証明図を定義する。

例 2.1 でも経験したとおり、証明の構想は、「既に正しいと認められた性質」を適用するというステップを繰り返して、与えられた仮定から結論を導こうとする操作である。したがって、その各ステップに対応する推論規則を定め、それを組み合わせた形で **LKP** 構想図を定義すればよい。その各ステップに対応する推論規則は、**LKP** 推論規則として定義する。前節で述べたとおり、**LKP** 推論規則の波線は、もともになる推論が読み取れるようにする。

さらに、証明の構想の各ステップに対応する推論規則は、「既に正しいと認められた性質」に対応して決められるようにする。この結果として、実際の証明の構想を忠実に表現できるようになっている。具体例は 5 節に示してある。一方、[4] の推論規則は、論理結合子と限定子に関するものに限定されていたため、実際の証明の構想で用いられる推論を忠実に推論規則で表現できていなかった。

さて、**LKP** 構想図を定義するために、まず、**LKP** 推論規則を定義する。

定義 4.1

(1) $m, n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n \text{ から } R \text{ が導かれる} \quad (4.1.1)$$

が既に正しいと認められた性質であるとき、

$$\frac{\overline{\overline{\Gamma \Rightarrow Q_1}} \quad \dots \quad \overline{\overline{\Gamma \Rightarrow Q_n}} \quad \overline{\overline{R, \Gamma \Rightarrow P}}}{\overline{\overline{P_1, \dots, P_m, \Gamma \Rightarrow P}}} \text{(P 左)} \quad \text{および} \quad \frac{\overline{\overline{\Gamma \Rightarrow Q_1}} \quad \dots \quad \overline{\overline{\Gamma \Rightarrow Q_n}}}{\overline{\overline{P_1, \dots, P_m, \Gamma \Rightarrow R}}} \text{(P 右)}$$

は **LKP** 推論規則である。ただし、 $P \neq R$ であり、すべての P_i は Γ に現れ、どの Q_j も Γ に現れない。

(2) 次の6つは **LKP** 推論規則である.

$$\begin{array}{c}
\frac{P, \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \rightarrow Q} (\rightarrow \text{右}) \quad \frac{P, \Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg P} (\neg \text{右}) \quad \frac{\neg P, \Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow P} (\text{背理法}) \\
\\
\frac{P, \Gamma \Rightarrow R \quad Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R} (\vee \text{左}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P[z/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x P} (\forall \text{右}) \quad \frac{P[z/x], \Gamma \Rightarrow Q}{\exists x P, \Gamma \Rightarrow Q} (\exists \text{左})
\end{array}$$

ただし, 任意の項 t に対し, $P[t/x]$ は, P の x に t を代入した結果を表し, $(\forall \text{右})$ と $(\exists \text{左})$ における z は, その下式において自由に出現しない変数である⁵.

(3) (2) の推論規則と (1), (2) の推論規則を組み合わせた推論が, 既に正しいと認められた性質であれば, その推論に対応する推論規則は **LKP** 推論規則である.

(4) (1)~(3) の各 **LKP** 推論規則の上式に現れるいくつかの (0 個でもよい) 述語の上に波線を引き, 下式に現れるいくつかの (0 個でもよい) 述語の下に波線を引いた推論規則も, **LKP** 推論規則である.

例 1.1 で, 証明の構想には, 総合的方法 (順方向), 解析的方法 (逆方向) の 2 つがあると述べたが, [5] では, Heinz 他 [2] を参照しながら, この 2 つに加え調整があると述べている. この 3 種類は, **LKP** 推論規則では次のように対応する. 下式左辺に, 上に波線がついた述語が現れる推論規則が総合的方法による構想のステップに対応し, 下式右辺の上に波線がついた推論が解析的方法による構想のステップに対応する. どちらでもないのが, $m = 0$ の場合の (P 左) であるが, これが調整による構想のステップに対応する. また, $m > 0$ の場合の (P 右) は, 下式の左辺にも右辺にも上に波線がつく述語があるが, 総合的方法とも解析的方法ともとらえることが可能である. $m = 0$ の場合の (P 左) と, $m > 0$ かつ $n = 0$ の場合の (P 右), すなわち,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \underline{Q_1} \quad \cdots \quad \Gamma \Rightarrow \underline{Q_n} \quad \underline{R}, \Gamma \Rightarrow P}{\Gamma \Rightarrow P} (\text{P 左}), \quad \frac{}{\underline{P_1}, \dots, \underline{P_m}, \Gamma \Rightarrow \underline{R}} (\text{P 右})$$

について, より具体的に述べよう. $m = 0$ の場合の (P 左) は, Q_j または R と関係づけられる情報が下式になく (すなわち, 下式左辺の使える性質にも下式右辺の導きたい性質にもなく), 総合的方法でも解析的方法とも異なる推論である. $m > 0$ かつ $n = 0$ の場合の (P 右) は, 目標のシーケントが (4.1.1) から即座に導かれ, 総合的方法と解析的方法による推論は不要なので, 複数の解釈が可能となっている.

以後, 混乱しないときは, **LKP** 推論規則の上式の各述語の上の波線と, 下式の各述語の下波線を省略する.

⁵項は, x の動く範囲のものの表現で, 「自由に出現する」とは, 限定記号をとまわずに現れるということである.

例 4.2 証明の構想において、 $\Gamma \Rightarrow R$ に対して「 P から Q を導く」が適用されたステップは、次の **LKP** 推論規則に対応づけられる。ただし、 Q は Γ に現れないとする。

$$\begin{array}{ll}
(1) Q \neq R \text{ で } P \text{ が } \Gamma \text{ に現れるとき} & (2) Q \neq R \text{ で } P \text{ が } \Gamma \text{ に現れないとき} \\
\frac{\overline{Q, \Gamma \Rightarrow R}}{\overline{P, \Gamma \Rightarrow R}} (\text{P 左}) & \frac{\overline{\Gamma \Rightarrow P} \quad \overline{Q, \Gamma \Rightarrow R}}{\overline{\Gamma \Rightarrow R}} (\text{P 左}) \\
(3) Q = R \text{ で } P \text{ が } \Gamma \text{ に現れるとき} & (4) Q = R \text{ で } P \text{ が } \Gamma \text{ に現れないとき} \\
\overline{\overline{P, \Gamma \Rightarrow Q}} (\text{P 右}) & \frac{\overline{\Gamma \Rightarrow P}}{\overline{\Gamma \Rightarrow Q}} (\text{P 右})
\end{array}$$

上の各 **LKP** 推論規則に対応する構想は具体的には、次のとおりである。

- (1) P から Q が導かれるので、下式を示すには、その左辺に Q を加えて (Q を使える性質に加えて) R を導けばよい (総合的方法)。
- (2) P から Q が導かれるので、下式を示すには、同じ左辺から P を導き、 Q を左辺に加えて R を導けばよい。
- (3) P から $Q (= R)$ が導かれるので、下式を示すには、同じ左辺から P を導ければよい (解析的方法)。
- (4) P から $Q (= R)$ が導かれるので、下式左辺に P があることから、下式が示される。

例 4.3 数学で既に正しい認められている、論理結合子と限定子の性質を (P 左) と (P 右) に反映すると、たとえば、次のようになる。これらと、定義 4.1 の二重線の **LKP** 推論規則を合わせると、[4] の図式化で用いた推論規則になる。つまり、本稿の **LKP** 推論規則は、以下の推論規則を一般化した推論規則ともとらえることができる。

$$\begin{array}{ll}
\frac{\overline{P_i, \Gamma \Rightarrow R}}{\overline{P_1 \wedge P_2, \Gamma \Rightarrow R}} (\wedge \text{左}) \quad (i = 1, 2) & \frac{\overline{\Gamma \Rightarrow P} \quad \overline{\Gamma \Rightarrow Q}}{\overline{\Gamma \Rightarrow P \wedge Q}} (\wedge \text{右}) \\
\frac{\overline{\Gamma \Rightarrow P} \quad \overline{Q, \Gamma \Rightarrow R}}{\overline{P \rightarrow Q, \Gamma \Rightarrow R}} (\rightarrow \text{左}) & \frac{\overline{\Gamma \Rightarrow P_i}}{\overline{\Gamma \Rightarrow P_1 \vee P_2}} (\vee \text{右}) \quad (i = 1, 2) \\
\frac{\overline{\Gamma, \Sigma \Rightarrow P}}{\overline{\neg P, \Gamma \Rightarrow \perp}} (\neg \text{左}) & \frac{\overline{P[t/x], \Gamma \Rightarrow Q}}{\overline{\forall x P, \Gamma \Rightarrow Q}} (\forall \text{左}) \quad \frac{\overline{\Gamma \Rightarrow P[t/x]}}{\overline{\Gamma \Rightarrow \exists x P}} (\exists \text{右})
\end{array}$$

ただし、 $(\forall \text{左})$ と $(\exists \text{右})$ における t は、任意の項である。

LKP 推論規則は、証明の構想における各ステップ (推論) を表現していた。ゆえに、この節の冒頭で述べたとおり、証明の構想を表す **LKP** 構想図は、**LKP** 推論規則を組み合わせで定義すればよい。その帰納的定義を以下に示す。

定義 4.4 波線付きシーケント S の **LKP** 構想図を次のように帰納的に定義する。

(1) \bar{S} は, S の **LKP** 構想図である. ただし, \bar{S} を S と省略してよい⁶.

(2) $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ ($m > 0$) がそれぞれ波線付きシークエント S_1, \dots, S_m の **LKP** 構想図で, $\frac{S_1 \cdots S_m}{S}$ (または $\frac{S_1 \cdots S_m}{S}$) が **LKP** 推論規則のとき, 図式 $\frac{\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_m}{S}$ (または $\frac{\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_m}{S}$) は, S の **LKP** 構想図である.

また, S の **LKP** 構想図を, S から波線を除いたシークエントの **LKP** 構想図ともいう.

例 4.5 P_1 から P_2 , P_2 から P_3 がそれぞれ導かれることが, 既に正しいと認められているとする. このとき, 2つの図式

$$\begin{array}{c} \frac{P_3 \Rightarrow P}{\frac{P_2 \Rightarrow P}{\frac{P_1 \Rightarrow P}{}}} (2) \\ \frac{P_2 \Rightarrow P}{\frac{P_1 \Rightarrow P}{}} (1) \end{array} \quad \text{と} \quad \begin{array}{c} \frac{P \Rightarrow P_3}{\frac{P \Rightarrow P_2}{\frac{P \Rightarrow P_1}{}}} (2) \\ \frac{P \Rightarrow P_2}{\frac{P \Rightarrow P_1}{}} (1) \end{array}$$

は, それぞれ, $P_1 \Rightarrow P$ の **LKP** 構想図と $P \Rightarrow P_3$ の **LKP** 構想図である. この **LKP** 構想図に対応する証明の構想を以下に示す. この構想では, 上の **LKP** 構想図の推論規則との対応を, (1),(2)の番号を用いて示している. 左は総合的方法での構想であり, 右は解析的方法での構想である. どちらの構想も証明としては未完成である.

左の **LKP** 構想図の構想:

- (0) $P_1 \Rightarrow P$ を示したい.
- (1) P_1 から P_2 が導かれるので, $P_2 \Rightarrow P$ を示せばよい.
- (2) P_2 から P_3 が導かれるので, $P_3 \Rightarrow P$ を示せばよい.

右の **LKP** 構想図の構想:

- (0) $P \Rightarrow P_3$ を示したい.
- (1) P_2 から P_3 が導かれるので, $P \Rightarrow P_2$ を示せばよい.
- (2) P_1 から P_2 が導かれるので, $P \Rightarrow P_1$ を示せばよい.

LKP 証明図は, 証明の構想のうち成功したものを表す図式として定義する. 「成功した」とは, 与えられた仮定と結論を, 既に正しいと認められた性質を用いて結びつけられたということである. **LKP** 推論規則は, 既に正しいと認められた性質にもとづいて定められているので, **LKP** 構想図の定義 4.4(1) の \bar{S} が, 既に正しいと認められた性質, つまり, $n = 0$ の場合の (P 右) になっていれば, それが, 成功した証明の構想を表現することになる. つまり, **LKP** 証明図は, 次のように定義すればよい.

定義 4.6 波線付きシークエント S の **LKP** 証明図を次のように帰納的に定義する.

(1) \bar{S} が **LKP** 推論規則のとき, \bar{S} は, S の **LKP** 証明図である.

(2) $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ ($m > 0$) がそれぞれ波線付きシークエント S_1, \dots, S_m の **LKP** 証明図で, $\frac{S_1 \cdots S_m}{S}$ (または $\frac{S_1 \cdots S_m}{S}$) が **LKP** 推論規則のとき, 図式 $\frac{\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_m}{S}$ (または $\frac{\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_m}{S}$) は, S の **LKP** 証明図である.

⁶ S でなく, \bar{S} とするのは, 後で定義する **LKP** 証明図を **LKP** 構想図の特殊な場合として定義したいからである. **LKP** 証明図でない **LKP** 構想図では, 混乱しない限り省略形を用いる.

また、 S の **LKP** 証明図を、 S から波線を除いたシーケントの **LKP** 証明図ともいう。

定義から、**LKP** 証明図は **LKP** 構想図でもある。

例 4.7 P_1 から P_2 , P_2 から P_3 , P_3 から P_4 がそれぞれ導かれることが、既に正しいと認められているとする。このとき、2つの図式

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\frac{}{P_3 \Rightarrow P_4}}{}{} (3)}{}{} (2)}{}{} (1)}{P_1 \Rightarrow P_4} \end{array} \quad \text{と} \quad \begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\frac{}{P_1 \Rightarrow P_2}}{}{} (3)}{}{} (2)}{}{} (1)}{P_1 \Rightarrow P_4} \end{array}$$

はどちらも $P_1 \Rightarrow P_4$ の **LKP** 証明図である。この **LKP** 証明図に対応する証明の構想を以下に示す。例 4.5 と同様に、この構想と上の **LKP** 証明図の推論規則との対応を、番号を用いて示している。左は総合的方法での構想であり、右は解析的方法での構想である。

左の **LKP** 証明図の構想：

- (0) $P_1 \Rightarrow P_4$ を示したい。
- (1) P_1 から P_2 が導かれるので、 $P_2 \Rightarrow P_4$ を示せばよい。
- (2) P_2 から P_3 が導かれるので、 $P_3 \Rightarrow P_4$ を示せばよい。
- (3) P_3 から P_4 は前提で正しいと認められている。

右の **LKP** 証明図の構想：

- (0) $P_1 \Rightarrow P_4$ を示したい。
- (1) P_3 から P_4 が導かれるので、 $P_1 \Rightarrow P_3$ を示せばよい。
- (2) P_2 から P_3 が導かれるので、 $P_1 \Rightarrow P_2$ を示せばよい。
- (3) P_1 から P_2 は前提で正しいと認められている。

なお、2つの **LKP** 証明図から得られる証明の筋道をフローチャートで表現すると、どちらも

$$P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow P_3 \Longrightarrow P_4$$

となり、2つの構想の違いを区別できない。一方、**LKP** 証明図では、その構想の違いを表現できていることがわかる。この証明の筋道は、各 **LKP** 推論規則の波線の対応をたどることで導かれる。

LKP 構想図と **LKP** 証明図では、同じ述語を何度も書くことが多いので、表現を簡潔にするために、各推論規則において、上式左辺では、下式左辺から波線を除いた列の部分列を“ \uparrow ”で表してよいことにする。また、上式右辺は、下式右辺 (から波線を除いた述語) と同じとき“ \downarrow ”で表してよいことにする。たとえば、例 4.7 の2つの証明図は、それぞれ、次のように表現できることになる。

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\frac{}{P_3 \Rightarrow P_4}}{}{} (3)}{}{} (2)}{}{} (1)}{P_1 \Rightarrow P_4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\frac{}{P_1 \Rightarrow P_2}}{}{} (3)}{}{} (2)}{}{} (1)}{P_1 \Rightarrow P_4} \end{array}$$

5 具体例

この節では、実際の証明の構想を **LKP** 構想図で表現し、**LKP** 構想図のよさを確認する。どの **LKP** 構想図からも、波線の対応をたどることにより、もとの構想を復元できるが、さらに、

- 証明の構想から読み取れることが **LKP** 構想図からも読み取れること
- 構想の各ステップの目標が、**LKP** 構想図 ではわかりやすくなっていること

も確認する。前者を例 5.6 で、後者を例 5.7 で確認する。このうち後者は、[4] でも主張されていたが、ここでは、実際の例でそれを示している。

さて、2つの例の証明問題は、中学校第2学年の単元「証明」の範囲の、一重線の推論規則だけで表現できるものから抽出しており、そこでは、次の性質が、既に正しいと認められている。

性質 5.1 対頂角は等しい。

性質 5.2 2つの直線に1つの直線が交わるとき、

- (a) 2つの直線が平行ならば、同位角は等しい。
- (b) 2つの直線が平行ならば、錯角は等しい。

性質 5.3

- (a) 合同な図形では、対応する線分の長さはそれぞれ等しい。
- (b) 合同な図形では、対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

性質 5.4

- (a) 2つの三角形は、3組の辺が、それぞれ等しいとき合同である。
- (b) 2つの三角形は、2組の辺とその間の角が、それぞれ等しいとき合同である。
- (c) 2つの三角形は、1組の辺とその両端の角が、それぞれ等しいとき合同である。

性質 5.5 三角形の内角の和は 180° である。

以下、2つの例を示す。

例 5.6 次の証明問題の証明の4つの構想とそれらに対応する **LKP** 構想図を考え、その **LKP** 構想図に、もとの構想から読み取れることが反映されていることを確認する。

問題 図2で $\ell \parallel m$ として、 ℓ 上の点 A と m 上の点 B の中点を O とする。点 O を通る直線 n が ℓ, m と交わる点を、それぞれ、C, D するとき、 $AC=BD$ を示せ。

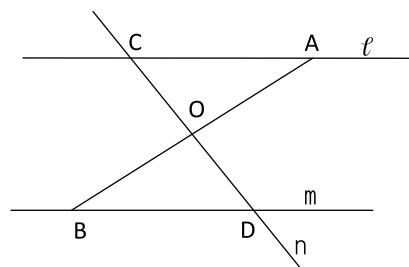


図 2: 例 5.6 の図

構想 1

- (1) $AC=BD$ のためには, $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$ を示せばよい (\because 性質 5.3(a)).
 (2) $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$ のためには 3 組の辺がそれぞれ等しいことを示せばよい (\because 性質 5.4(a)).
 (3) 3 組のうちの 1 組は, AC と BD で, これは最初の目標に戻ってしまう (失敗).

構想 1 の LKP 構想図

$$\frac{\frac{\frac{\uparrow \Rightarrow AC = BD}{\text{~~~~~}} \quad \frac{\uparrow \Rightarrow AO = BO}{\text{~~~~~}} \quad \frac{\uparrow \Rightarrow CO = DO}{\text{~~~~~}}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ACO \equiv \triangle BDO} \quad (2)$$

$$\frac{n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる, } O \text{ は } AB \text{ の中点, } \ell // m, \dots \Rightarrow AC = BD}{\text{~~~~~}} \quad (1)$$

構想 2

- (1) 構想 1(1) と同じ.
 (2) $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$ を示すために対応する辺や角で等しいものを探すと, まず, 対頂角だから, $\angle AOC = \angle BOD$ である (\because 性質 5.1).
 (3) O は AB の中点だから, $AO=BO$ である (\because 中点の定義).
 (4) $\ell // m$ だから, $\angle ACO = \angle BDO$ である (\because 性質 5.2(b)).
 (5) $\ell // m$ だから, $\angle CAO = \angle DBO$ である (\because 性質 5.2(b)).
 (6) (2),(3),(5) から (1) の目的の合同がいえる (\because 性質 5.4(c)).

構想 2 の LKP 構想図

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\angle AOC = \angle BOD, AO = BO, \angle CAO = \angle DBO, \uparrow \Rightarrow \triangle ACO \equiv \triangle BDO}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (6)$$

$$\frac{\frac{\frac{\angle ACO = \angle BDO, \ell // m, \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (4)$$

$$\frac{\frac{\frac{AO = BO, \ell // m, \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (3)$$

$$\frac{\frac{\frac{\angle AOC = \angle BOD, O \text{ は } AB \text{ の中点, } \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる, } \uparrow \Rightarrow \triangle ACO \equiv \triangle BDO}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (1)$$

$$\frac{n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる, } O \text{ は } AB \text{ の中点, } \ell // m, \dots \Rightarrow AC = BD}{\text{~~~~~}}$$

構想 3

- (1)~(3) 構想 2 と同じ.
 (4) (2),(3) から, $\angle CAO = \angle DBO$ を示せばよい (\because 性質 5.4(c)).
 (5) $\ell // m$ から, (4) の目標がいえる (\because 性質 5.2(b)).

構想 3 の LKP 構想図

$$\frac{\frac{\frac{\ell // m, \uparrow \Rightarrow \angle CAO = \angle DBO}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (5)$$

$$\frac{\frac{\frac{\angle AOC = \angle BOD, AO = BO, \uparrow \Rightarrow \triangle ACO \equiv \triangle BDO}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (4)$$

$$\frac{\frac{\frac{\angle AOC = \angle BOD, O \text{ は } AB \text{ の中点, } \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (3)$$

$$\frac{\frac{\frac{n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる, } \uparrow \Rightarrow \triangle ACO \equiv \triangle BDO}{\text{~~~~~}}}{\text{~~~~~}} \quad (2)$$

$$\frac{n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる, } O \text{ は } AB \text{ の中点, } \ell // m, \dots \Rightarrow AC = BD}{\text{~~~~~}} \quad (1)$$

構想 4

- (1) 仮定からわかることを列挙する．まず，対頂角だから， $\angle AOC = \angle BOD$ である (\because 性質 5.1).
- (2) O は AB の中点だから， $AO = BO$ である (\because 中点の定義).
- (3) $\ell // m$ だから， $\angle ACO = \angle BDO$ である (\because 性質 5.2(b)).
- (4) $\ell // m$ だから， $\angle CAO = \angle DBO$ である (\because 性質 5.2(b)).
- (5) (1),(2),(4) から $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$ である (\because 性質 5.4(c)).
- (6) (5) から， $AO = BO$ である (\because 性質 5.3(a)).

構想 4 の LKP 構想図

$$\begin{array}{c}
 \overline{\overline{\triangle ACO \equiv \triangle BDO, \uparrow \Rightarrow AC = BD}} \quad (6) \\
 \overline{\overline{\angle AOC = \angle BOD, AO = BO, \angle CAO = \angle DBO, \uparrow \Rightarrow \downarrow}} \quad (5) \\
 \overline{\overline{\angle ACO = \angle BDO, \ell // m, \uparrow \Rightarrow \downarrow}} \quad (4) \\
 \overline{\overline{AO = BO, \ell // m, \uparrow \Rightarrow \downarrow}} \quad (3) \\
 \overline{\overline{\angle AOC = \angle BOD, O \text{ は } AB \text{ の中点}, \uparrow \Rightarrow \downarrow}} \quad (2) \\
 \overline{\overline{n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる}, \dots \Rightarrow AC = BD}} \quad (1)
 \end{array}$$

以下，LKP 構想図に，もとの構想から読み取れることが反映されていることを確認する．

- 構想の各ステップが総合的方法であるか解析的方法であるかの情報は，LKP 構想図の波線の位置に反映されている．波線の位置は，形式的に判断できるので，もとの構想よりも，その情報が読み取りやすくなっている．具体的には，構想 1 では右辺のみに波線があり，解析的方法での構想とわかる．構想 4 では (6) をのぞき左辺のみに波線があり，総合的方法での構想とわかる．同様に，構想 2 は (1) 以外のステップが総合的方法であり，構想 3 は解析的方法と総合的方法を何度か繰り返していることがわかる．
- 構想 1 は失敗した構想であるが，その原因はステップ (2) でループが起こったことであり，構想はその前のステップに戻る必要がある．このことは，LKP 構想図の推論規則 (2) の上式で 2 回目のシーケントが現れ，(2) の下式を示そうとするステップに戻る必要があることに反映している．
- 構想 2, 構想 3, 構想 4 は成功した構想であり，したがって，対応する上の LKP 構想図は LKP 証明図でもある．そこからできる証明はどれもフローチャート

$$\left. \begin{array}{ll} n \text{ と } AB \text{ が } O \text{ で交わる} & \Rightarrow \angle AOC = \angle BOD \\ O \text{ は } AB \text{ の中点} & \Rightarrow AO = BO \\ \ell // m & \Rightarrow \angle CAO = \angle DBO \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACO \equiv \triangle BDO \Rightarrow AC = BD$$

で表現される．つまり，3 つの構想の違いが，LKP 証明図に反映されている．

- 構想 2 の (4)，構想 4 の (3) は，証明に不要な（つまり，上のフローチャートに現れない）ステップであるが，LKP 構想図には反映されている．

例 5.7 次の証明問題の証明の 2 つの構想とそれらに対応する LKP 構想図を考え，その LKP 構想図では，もとの構想の各ステップの目標がよりわかりやすく反映されていることを確認する．

$\frac{\frac{\frac{\angle BAE = \angle CDE, \angle ABE = \angle DCE, AB = DC, \uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}{\angle AEB = \angle DEC, \angle ABE = \angle DCE, \uparrow \Rightarrow \downarrow}}{\angle AEB = \angle DEC, \angle OCA = \angle OBD, \uparrow \Rightarrow \downarrow}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}$	(1)
$\frac{\frac{\frac{\angle AEB = \angle DEC, \angle ABE = \angle DCE, \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\angle AEB = \angle DEC, \angle OCA = \angle OBD, \uparrow \Rightarrow \downarrow}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}$	(2)
$\frac{\frac{\frac{\angle AEB = \angle DEC, \angle ABE = \angle DCE, \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\angle AEB = \angle DEC, \angle OCA = \angle OBD, \uparrow \Rightarrow \downarrow}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}$	(3)
$\frac{\frac{\frac{\angle AEB = \angle DEC, \angle ABE = \angle DCE, \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\angle AEB = \angle DEC, \angle OCA = \angle OBD, \uparrow \Rightarrow \downarrow}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}$	(4)
$\frac{\frac{\frac{\angle AEB = \angle DEC, \angle ABE = \angle DCE, \uparrow \Rightarrow \downarrow}{\angle AEB = \angle DEC, \angle OCA = \angle OBD, \uparrow \Rightarrow \downarrow}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE}$	(5)

- 構想 1 も構想 2 もそのステップ (1) の結果、目標がどう変わったかが、読み取りにくいですが、**LKP** 構想図からは、その目標が推論規則 (1) の 2 つの上式を示すことであることが、即座に読み取れる。
- 構想 1 のステップ (4) とステップ (5) の関係は読み取りにくく、故に、ステップ (5) の結果、目標がどう変わったかも読み取りにくいですが、**LKP** 構想図からは、推論規則 (4) と推論規則 (5) の位置関係からもとの構想の (4) と (5) の関係も読み取れ、ステップ (5) の結果、目標が推論規則 (5) の上式に変わったことが、即座にわかる。構想 2 のステップ (5) とステップ (6) についても同様である。

- [1] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen. I-II, Mathematische Zeitschrift. 39, 1934-5, (2):pp. 176–210, (3):pp. 405–431.
- [2] Aiso Heinze, Ying-Hao Cheng, Stefan Ufer, Fou-Lai Lin, and Kristina Reiss. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany, ZDM Mathematics Education, 40, 2008, pp. 443–453.
- [3] George Pólya. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (Princeton Science Li Edition) New Jersey, Princeton University Press, 1957/2015.
- [4] 佐々木克巳. 証明の構想を表現する新しい図式の提案, 数学教育学会誌, 2015 年度数学教育学会春季年会発表論文集, 数学教育学会, 2015, pp. 208–210.
- [5] 辻山洋介. 学校数学における証明の構想の意義に関する研究, 日本数学教育学会誌. 数学教育学論究 95, 2011, pp. 29-44.