

南山大学大学院  
博士 (数理学) 論文

病院における外来患者の  
待ち時間分布の導出とその活用

令和元年 8 月 2 日  
市原 寛之

# 目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	既存研究	3
1.3	論文の構成	4
第 2 章	病院における予約の仕組みと本研究で扱う診察待ち時間モデルの記法とその活用方法	7
2.1	日本の病院における予約の仕組み	7
2.2	診察待ち時間モデルの記法	8
2.3	診察待ち時間モデルの活用方法の一例	9
第 3 章	$M + D^N/M/1$ の場合	14
3.1	記号の定義とモデルの説明	14
3.2	各患者の診察待ち時間とその分布関数の導出方法	17
3.2.1	予約患者の診察待ち時間	17
3.2.2	初診患者の診察待ち時間	18
3.2.3	予約患者の待ち時間の分布関数の導出方法	20
3.2.4	初診患者の待ち時間の分布関数の導出方法	21
3.3	確率変数 $E_l, S_1^l, E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$ の分布関数の導出	22
3.3.1	確率変数 $E_l$ の分布関数の導出	22
3.3.2	確率変数 $S_1^l$ の分布関数の導出	25
3.3.3	$E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$ の分布関数の導出	25
3.4	予約患者, 初診患者の待ち時間の分布関数の導出	26
3.4.1	予約患者の待ち時間の分布関数の導出	26
3.4.2	初診患者の待ち時間の分布関数の導出	28
第 4 章	1 つの診療科に医師が 2 人存在するモデル (指数サービスの場合)	30
4.1	待ち行列モデル $D^N_d/M/1$ における予約患者の待ち時間の分布関数の導出	31
4.2	待ち行列モデル $M/M/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出	33
4.3	待ち行列モデル $GI/M/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出	34



4.4	待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/M/1$ における予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の分布関数の導出	39
第 5 章	1 つの診療科に医師が 3 人存在するモデル (指数サービスの場合)	46
5.1	待ち行列モデル $GI/M/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出	47
5.2	待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/M/1$ における予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の分布関数の導出	49
第 6 章	$M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ の場合	54
6.1	記号の定義とモデルの説明	54
6.2	各患者の診察待ち時間とその分布関数の導出方法	56
6.3	確率変数 $E_l, S_1^l, E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$ の分布関数の導出	56
6.3.1	確率変数 $E_l$ の分布関数の導出	56
6.3.2	確率変数 $S_1^l$ の分布関数の導出	62
6.3.3	$E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$ の分布関数の導出	62
6.4	予約患者と初診患者の待ち時間の分布関数の導出	64
6.4.1	予約患者の待ち時間の分布関数の導出	64
6.4.2	初診患者の待ち時間の分布関数の導出	68
第 7 章	1 つの診療科に医師が 2 人存在するモデル (アーランサービスの場合)	70
7.1	待ち行列モデル $D^{N_d}/E_{\alpha_1}/1$ における予約患者の待ち時間の分布関数の導出	72
7.2	待ち行列モデル $M^l/E_{\alpha_2}/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出	74
7.3	待ち行列モデル $GI/E_{\alpha_2}/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出	75
7.4	待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ における予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の分布関数の導出	79
第 8 章	実データを用いたモデル (各枠に来院した初診患者を全て枠の中で診察) の検証	87
8.1	モデルの検証方法	87
8.2	データの診察待ち時間修正方法	87
8.3	待ち行列モデル $M + D^{N^l}/M/1$ の検証	89
8.3.1	パラメータの設定	89
8.4	待ち行列モデル $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ の検証	91
8.4.1	パラメータの設定	91
第 9 章	各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を設定するモデル	98
9.1	はじめに	98
9.2	記号の定義とモデルの説明	98
9.3	予約患者と初診患者の診察待ち時間	100
9.3.1	予約患者の診察待ち時間	100

9.3.2	初診患者の診察待ち時間 . . . . .	100
9.4	確率変数 $E_l$ の分布関数の導出 . . . . .	102
9.5	予約患者の診察待ち時間の分布関数と密度関数の導出 . . . . .	106
9.6	初診患者の診察待ち時間の分布関数と密度関数の導出 . . . . .	110
第 10 章	実データを用いたモデル (各枠の終了時刻までに診察可能な初診患者の人数を設定) の 検証 . . . . .	113
10.1	診察待ち時間モデルのシミュレーションによる検証 . . . . .	113
10.1.1	結果の考察 . . . . .	114
10.2	診察待ち時間モデルの診察の間の空き時間を考慮したシミュレーションによる検証 . . . . .	114
10.3	診察待ち時間の実データを用いたモデルの検証 . . . . .	115
第 11 章	結論と今後の課題 . . . . .	126
参考文献	. . . . .	129
付録	. . . . .	131
付録 A	各種計算, 証明 . . . . .	131
A.1	積分の証明 . . . . .	131
A.2	$M + D^N/M/1$ モデルにおける $s(t; k)$ の計算 . . . . .	132
A.3	$M^l + D^{N_d}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ モデルにおける $s(t; n)$ の計算 . . . . .	132
A.4	$M^l + D^{N_d}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ モデル (各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を 設定) における $S_i(t)$ の計算 . . . . .	133
付録 B	各モデルにおける予約患者待ち時間, 初診患者待ち時間の期待値と分散値の計算 . . . . .	135
B.1	予約患者待ち時間の期待値の計算 . . . . .	135
B.2	予約患者待ち時間の分散値の計算 . . . . .	136
B.3	初診患者待ち時間の期待値の計算 . . . . .	137
B.4	初診患者待ち時間の分散値の計算 . . . . .	138
付録 C	$M + D^N/M/1$ における各患者の待ち時間の期待値と分散値の計算 . . . . .	140
C.1	予約患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	140
C.2	予約患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	141
C.3	初診患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	142
C.4	初診患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	143
付録 D	$D^N/M/1$ における予約患者の待ち時間の期待値と分散値の計算 . . . . .	145
D.1	予約患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	145
D.2	予約患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	145

付録 E	$GI + D^{N_d}/M/1$ における各患者の待ち時間の期待値と分散値の計算	147
E.1	予約患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	147
E.2	予約患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	150
付録 F	$M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ における各患者の待ち時間の期待値と分散値の計算	152
F.1	予約患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	152
F.2	予約患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	153
付録 G	$D^{N^l}_1/E_{\alpha_1}/1$ における予約患者の待ち時間の期待値と分散値の計算	156
G.1	予約患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	156
付録 H	$M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ における各患者の待ち時間の期待値の計算	157
H.1	予約患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	157
H.2	予約患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	158
H.3	初診患者の待ち時間の期待値の計算 . . . . .	160
H.4	初診患者の待ち時間の分散値の計算 . . . . .	164

# 目次

1.1	本研究で扱う予約枠の考え方	3
1.2	論文の構成	6
3.1	予約枠	15
3.2	$E_l, E'_l, lT$ の関係 ( $l = 1, 2$ )	16
3.3	$E'_2 < T$ である場合	16
3.4	1 枠に来院する予約患者待ち時間	18
3.5	$l$ 枠 ( $l \geq 2$ ) に来院する予約患者の診察待ち時間	19
3.6	$l$ 枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間	19
3.7	領域 $D$	20
4.1	初診患者の分け方	30
4.2	奇数番目に来院する初診患者の到着時間間隔	37
4.3	偶数番目に来院する初診患者の到着時間間隔	37
4.4	待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/M/1$ を 2 つ並列させる場合	39
5.1	$3n - 2$ 番目に来院する初診患者の到着時間間隔	47
5.2	$3n - 1$ 番目に来院する初診患者の到着時間間隔	48
5.3	$3n$ 番目に来院する初診患者の到着時間間隔	48
5.4	待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/M/1$ を 3 つ並列させる場合	50
6.1	想定している状況	55
7.1	モデルを拡張後の初診患者の数え方	71
7.2	モデルを拡張後の初診患者の分け方	71
8.1	医師 a が診察した各患者の到着時刻と診察開始時刻 ([9] の基礎データより)	88
8.2	受療行動調査の中病院における診察時間の分布 ([3] のデータより)	88
8.3	各患者の診察待ち時間平均値の比較 ( $\overline{\lambda_2} < 3$ : 指数サービス)	94
8.4	各患者の診察待ち時間の平均値の比較 ( $\overline{\lambda_2} > 5$ : 指数サービス)	95
8.5	各患者の診察待ち時間平均値の比較 ( $\overline{\lambda_2} < 3$ : アーランサービス)	96

8.6	各患者の診察待ち時間の平均値の比較 ( $\overline{\lambda_2} > 5$ :アーランサービス) . . . . .	97
9.1	枠毎の初診患者の診察人数 . . . . .	99
9.2	$l$ 枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間 ((i) $\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l$ )	101
9.3	$l$ 枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間 ((ii) $n_{l'} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'+1}$ $l' \in \{l, l+1, l+2, l+3\}$ , (iii) $n_{l+4} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$ ) . . . . .	102
10.1	モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\overline{\lambda_2} < 3$ ) . . . . .	115
10.2	モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\overline{\lambda_2} > 5$ ) . . . . .	116
10.3	モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の診察待ち時間の標準偏差値の比較 ( $\overline{\lambda_2} < 3$ ) . . . . .	117
10.4	モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の診察待ち時間の標準偏差値の比較 ( $\overline{\lambda_2} > 5$ ) . . . . .	118
10.5	モデルにより算出された予約患者の診察待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された予約患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (医師 a:1 枠から 3 枠まで)	119
10.6	モデルにより算出された予約患者の診察待ち時間の待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された予約患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (医師 a:4 枠から 6 枠まで) . . . . .	120
10.7	モデルにより算出された初診患者の診察待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された初診患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (1 枠と 2 枠) . . . . .	121
10.8	モデルにより算出された初診患者の診察待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された初診患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (3 枠と 4 枠) . . . . .	122
10.9	モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間と診察の間の空き時間を考慮するシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間の比較 . . . . .	123
10.10	各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\overline{\lambda_2} < 3$ :アーランサービス) . . . . .	124
10.11	各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\overline{\lambda_2} > 5$ :アーランサービス) . . . . .	125

# 表目次

2.1	予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率 . . . . .	11
2.2	1 枠から 6 枠までの各枠の予約患者の人数の組み合わせ . . . . .	11
2.3	各枠で予約可能人数が同じである場合と予約患者の各枠の人数を変更させた場合の予約患者の待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率の比較 . . . . .	12
2.4	各枠に予約可能である人数が 5 人である時, 医師が 1 人である場合と医師を 2 人に増加させた場合の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率の比較 . . . . .	13
7.1	各医師が診察する初診患者の人数 (人) . . . . .	71
8.1	医師 a に予約可能な人数 ([9] の基礎データより) . . . . .	87
8.2	モデル $M + D^{N^t}/M/1$ で計算する際の各パラメータ (小数点第 3 位を四捨五入) . . .	93

# 第 1 章

## はじめに

### 1.1 本研究の背景と目的

近年、病院の診察待ち時間の長時間化は日本の多くの病院で問題となっている。平成 26 年度に厚生労働省が実施した受療行動調査 [2] では、診察を受ける時間より、待ち時間が長い患者が過半数を占めている。また「診察までの待ち時間」に対する満足度を見ると満足が 28.0%、不満が 27.6% となっており、他の項目に比べ満足割合が最も低く、不満割合が最も高い。さらに徳永ら [26] は「診察待ち時間」の満足度が他の項目に比べ低いことを示しており、また徳永ら [27] によると、病院内の滞在時間の中で、7 割近くの患者が診察までの待ち時間が最も苦痛であるとなっている。そのために診察待ち時間の短縮化や、苦痛を取り除くことが最優先で解決されるべき問題であることがわかる。さらに近年高齢化社会により病院における高齢者の数が増加している。このことは厚生労働省が平成 29 年度に実施した患者調査 [1] によると、65 歳以上の外来患者の割合が増加傾向にあることから分かる。そこで高齢者の患者のストレス低減のためにも、病院内で待ち時間を過ごす際の快適さ、病院内における滞在時間の短縮化がこれからの病院の大きな問題となる。

診察待ち時間の短縮化のために、予約制を導入する病院が増えている。日本の予約制は主に事前に予約した患者のみを診察する完全予約制と事前に予約した患者と予約せずに来院する患者を共に診察する予約制の 2 種類がある（詳細は 2.1 節で説明する）。但し予約制を導入したにも関わらず、事前に予約し来院する患者と予約をせずに来院する患者が混在する病院においては、その運用方法は非常に困難であり複雑な問題となる。このことは、新たに設立された病院や大規模な改修を行い、コンピュータによる予約システムを導入した病院でも起こり得る。

さらに、予約制導入とともに新しいサービスやシステムを導入している病院がある。例えば診察待ち時間を予測するものや、診察待ち時間を患者に有効活用させるために現在の診察状況を通知するものである。具体的には、予約すると自分の診察番号が与えられ、現在診察を行っている患者の診察番号が携帯電話を通して分かるシステムや、富士通ゼネラルが開発した NAVIT[4] といった端末がある。前者は小さなクリニック等で導入されている。また後者の NAVIT は大病院向けのシステムであり、NAVIT で受付を済ますことにより、患者の端末には診察当日の予定が表示され、現在の診察状況を端末を通して見ることができる。さらに診察時間になると通知が来るため、院内の喫茶店や売店で時間を有効活用でき、患者のストレスの低減につながる。これらのシステムを用いることにより、各クリニックや病院では診察

待ち時間のストレスの低減化を図っている。

但し、これらのシステムは実際に診察待ち時間の短縮を図るわけではない。これらは事前に診察待ち時間を患者に知らせ、来院する時間を調整するものや、病院内での滞在時間を有効活用しストレスを低減させることを目的としている。

そのために本研究では診察待ち時間を推定することにより、診察待ち時間を短縮させることを考える。診察待ち時間の長期化の原因は、ある枠に予約を取った患者の診察が、その枠内で終了せずに次の時間枠に診察を受ける患者に影響することにあると考えられる。これは、各診察室の予約患者の人数、患者の診察時間や1つの枠の長さ等の診察室を設計する要因の設定が適切でないために起こる。このことより、予約患者の人数や患者の診察時間等のデータから、外来患者の待ち時間を推定する方法が必要となる。

そこで、各診察室における予約可能な人数、診察時間の長さ等を適切に設定することが出来るツールを作成することを考える。具体的には、患者の来院人数、患者1人当たりの平均診察時間、患者の診察順序、各予約枠の長さ等の予約の仕組みが与えられた時に、待ち時間を推定する方法を考案する。つまりこれらの仕組みをパラメータとして、診察待ち時間を導くことの出来る仕組みを作成する。

この方法は次のように活用することが出来る。病院を新設したり、改修したりする時に病院の患者数、1つの枠の長さ、診察時間などを予測し、診察する医師の数、患者の診察順序等の予約の仕組みをパラメータとして与えることにより、外来患者の待ち時間を推定する。さらに推定した診察待ち時間が長い場合、パラメータを変更し、再び診察待ち時間を推定する。これを繰り返し行うことにより、診察待ち時間の長さを短縮できるようなパラメータを導き出すことが出来る。つまり医師数や予約の仕組みを変化させて、外来患者の待ち時間を推定すれば、待ち時間を許容可能な範囲に収めるような医師数や予約の仕組みを求めることが出来るようになる。いわば、病院の最適な設計のためのツールとして活用することが出来る。作成したツールの活用方法の詳細に関しては2.3節で詳しく説明する。

本研究では上記の方法を用いて外来患者の待ち時間を計算するシステムを実現し、病院の最適設計ツールを実際に病院に役立てることを目標とする。待ち時間の予測値の計算は非常に煩雑であるが、本研究ではこれらの計算をなるべく系統的に整理し、計算しやすいように工夫した。

まず、次のモデルで予約患者と初診患者の待ち時間の分布を求める。予約患者と初診患者2種類の患者が存在することを仮定する。1つの予約枠は時間区間として定義する。予約患者はある予約枠に予約して来院する。初診患者は予約せずに来院する。同じ予約枠に予約患者と初診患者が来院した場合、事前に予約を取り来院する予約患者を優先的に診察する。このような割り当てをする予約の仕組みの下での診察待ち時間のモデルを構築し、待ち時間推定の方法を考案する。そのために待ち行列理論を用いてモデルを定式化する。但し、初診患者の割り当て方は

- (1) 各枠に来院した初診患者をその枠の中で全て診察する
- (2) 各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を設定する

の2通り考察し、それぞれモデルを作成する。(1)のモデルは各枠に来院した初診患者は必ずその枠の中で診察が開始されるために、初診患者の優先度が高いものとなっている。(2)のモデルは各枠の終了時刻までに診察可能な初診患者の人数が決まっているために、初診患者の来院人数が多い場合は初診患者の診察が後ろの枠に回される可能性のあるモデルとなっている。[9]に「各予約枠(30分単位)に1名の余裕を持たせ、予約外の患者が来院した場合にその枠に順次入れていく運用を科内で統一した」と



の記述があるため (2) のモデルがより現実に近いものとなっているが、はじめに解析が容易な (1) のモデルの作成を行い、それを改良し (2) のモデルを作成する。

患者の待ち時間の確率モデルにおいて、各患者の平均診察時間や、平均到着人数、予約枠の時間の長さをパラメータとして、各予約枠の中での各患者の診察終了時刻を待ち時間の評価基準値とし、その分布関数の導出を行う。さらにそれを用いて診察待ち時間の期待値や分布関数を算出する。但し、厳密な待ち行列を考察すると統計量を陽に求めることは出来ない (詳細は 3.1 節で説明) ために、本モデルでは診察の空き時間を考慮しないことを仮定する (図 1.1)。そのことで 各予約枠における総診察時間の分布等を利用し、各予約枠内での各患者の診察終了時刻の分布が既知の確率計算手法を用いて、計算できるようになり、それを用いて、待ち時間の分布関数を導出できるようになった。実際の病院の現場では診察室は混雑しており、診察の空き時間が生じることは稀なことである。従ってこのような仮定をしても、実際には待ち時間の分布にはほとんど影響しない。

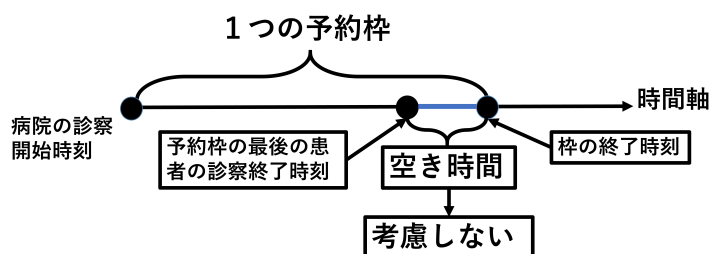


図 1.1: 本研究で扱う予約枠の考え方

また、診察待ち時間の期待値や分散値、分布関数を導出する際に必要となる様々な確率変数の密度関数と分布関数を求めるために、積率母関数と確率密度関数の関係を用いる。具体的にはそれらの確率変数の積率母関数を求め、逆ラプラス変換を行うことにより、それらの確率変数の確率密度関数を求める。そして密度関数の積分を行いこれらの分布関数を求める。この導出方法の利点は 3.1 節で詳しく説明する。

## 1.2 既存研究

診察待ち時間の調査報告や研究は過去に様々なものがなされている。

はじめに診察待ち時間の調査報告は過去にも様々なもの [[18],[28], [27], [9]] がなされている。三井ら [18] は 1997 年, 1999 年に信州大学付属病院で診察待ち時間調査を行っており、富木ら [28] が 2002 年に順天堂大学病院における全診療科の診察待ち時間の調査を行っている。徳永ら [27] は 2006 年に熊本機能病院において外来患者の待ち時間を調査している。石井ら [9] は 2009 年に衣笠病院のある診療科において、予約制を導入することや、予約あり患者、無し患者の医師への割り当て方を工夫することにより、診察待ち時間の改善をし、待ち時間改善前と改善後の結果を比較している。

また木佐ら [14] は診察時間に関しての論文調査をしている。診察時間の研究は診察待ち時間の研究と関連しているものが多く「待ち時間調査の研究で、副次的に診察時間を研究しているものが 7 件と多かった。」と記述がある。その中で徳永ら [27] の論文も挙がっている。

診察待ち時間を短縮または有効活用するためのシステムの作成に関しての論文も存在し、小川ら [20]

は最も診察待ち時間が短くなるような最適な患者の診察順序を計算するシステムの開発を行った。一方で大前ら [22] は待ち時間の情報提供や待ち時間の有効利用支援により、患者に待ち時間を長く感じさせないようなシステムの開発を行い、患者のストレスの低減化を図った。

また、待ち行列理論等の数理的な手法を用いた診察待ち時間に関する研究も幾つか存在し、紀永ら [11] が受付、検査、会計等の病院の一通りの全体のフローを待ち行列ネットワークモデルで構築し、歩行速度を所与とし、患者を各イベントに合理的に割り振るディスパッチングルールの提案をしている。森川ら [19] は予約患者と当日患者の待ち時間を共に最小化をするような医師への割り当て規則を提案し、数値実験を行っている。また、高木ら [25] が筑波大学病院の産婦人科における各病棟毎の入院患者の動向を待ち行列理論を用いて分析している。海外のヘルスケア分野における待ち時間の研究もいくつかなされている。はじめに待ち行列理論を用いたヘルスケア分野のサーベイ論文は [15] となっている。待ち時間に関しての分野は4つに分かれており、その中の Minimum Waiting Time に分類される箇所から一つ挙げると Jaustra P. ら [24] は放射線治療科において通常患者と急患を同じ待ち行列にするか否かに関しての議論を行っている。具体的には2種類の患者（通常患者と急患）を  $M/M/1$  のモデルを2つ並列させるか  $M/M/2$  のモデルで1つの待ち行列を用いるか比較をしている。さらに、Dimakou S. ら [5] は手術室の待ち時間の分布を容量制約のついた病院に対して、最適な待ち時間分布を記述するような理論的なモデルを用いて分析を行っている。Olorunsola S.A. ら [21] は  $M/M/c$  のモデルが病院の入院患者の待ち行列の流れの正確なモデルであることを示し、病院内の最適なベッド数をその性能指標を計算している。また、確率過程を用いる研究も幾つか存在する。例えば、Medhi J. [17] は患者がポアソン到着し、窓口で容量の制限を設けるような集団サービスの規則を設けた状態の待ち行列モデル ( $M/M_{a,b}/c$ ) における待ち時間の分布の導出を行っている。Franx G.J. ら [7] は患者がポアソン到着し、診察時間を一定時間で与えた待ち行列モデル ( $M/D/c$ ) に対して、定常分布の導出を行っている。

日本の診察待ち時間に関する研究 [11], [19] は、シミュレーションにより数値実験を行っているものとなり、[24] は待ち行列理論の既存の結果を用いてシミュレーションを行っている。これらの研究に対して、われわれは独自の診察待ち時間の確率モデルを作成し、診察待ち時間の分布関数を導出し、それを用いて待ち時間の解析を行う。また [25] では入院患者の動向の解析を行っているが、われわれは外来患者の診察待ち時間の解析を行う。

### 1.3 論文の構成

論文の構成は図 1.2 に示すとおりである。第2章で日本で主流となっている病院の予約制度と本研究で扱う診察待ち時間モデルの記法、さらに診察待ち時間モデルの活用方法に関して説明する。

第3章から第8章で「各枠に来院した初診患者をその枠の中で全て診察する」モデルに対して解析を行う。

第3章でサービス時間が指数分布に従うモデルに対して診察待ち時間の分布を導出する。3.1節で記号の定義とモデルの説明を行い、3.2節で各患者の待ち時間を確率変数の関数として表し、その分布関数の導出方法を示す。3.3節で各患者の診察待ち時間を導出するために必要な確率変数の密度関数と分布関数を導出し、3.4節でそれらの関数を用いて各患者の診察待ち時間の分布関数を導出する。

第4章では1つの診療科に医師が2人存在する場合のモデルを指数サービスの場合に考察する。4.1

節で予約患者のみの待ち行列における予約患者の診察待ち時間の分布関数の導出, 4.2 節, 4.3 節で初診患者のみの待ち行列における初診患者の診察待ち時間の分布関数の導出, 4.4 節で予約患者と初診患者両方が存在する待ち行列における各患者の診察待ち時間の分布関数の導出を行う。

第 5 章では 1 つの診療科に医師が 3 人存在する場合のモデルを指数サービスの場合に考察する。5.1 節で初診患者を 3 人の医師で分け, 初診患者のみ診察するモデルにおいて初診患者の診察待ち時間の分布関数の計算を行う。5.2 節で初診患者を 3 人の医師で分け, 初診患者と予約患者を共に診察するモデルにおいて各患者の診察待ち時間の分布関数の導出を行う。

第 6 章では前章までのモデルを初診患者が各枠で到着率が異なるポアソン到着に従い来院し, 予約患者が各枠で予約可能人数が異なるものに拡張する。また各患者のサービス時間の長さをアーラン分布に従うと仮定する。各節の分け方は第 3 章と同じである。

第 7 章では診療科に医師が 2 人存在する場合のモデルをアーランサービスの場合に考察する。各節の分け方は第 4 章と同じである。

第 8 章で前述したモデルの検証を実際の病院の診察待ち時間と比較することにより, モデルの検証を行う。

第 9 章では第 6 章で作成したモデルを「各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を設定する」モデルに拡張し, 各患者の診察待ち時間の分布関数を導出する。

第 10 章で第 9 章で作成したモデルの検証を行う。1 つ目は実際の病院の診察待ち時間の平均値とモデルにより算出された診察待ち時間の平均値を比較することにより行う。2 つ目は衣笠病院における診察待ち時間モデルに基づいたシミュレーションを行い, それにより算出された各患者の診察待ち時間の平均値と診察待ち時間の標準偏差値とモデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間と診察待ち時間の標準偏差値を比較する。

第 11 章で結論と今後の課題に関して述べる。

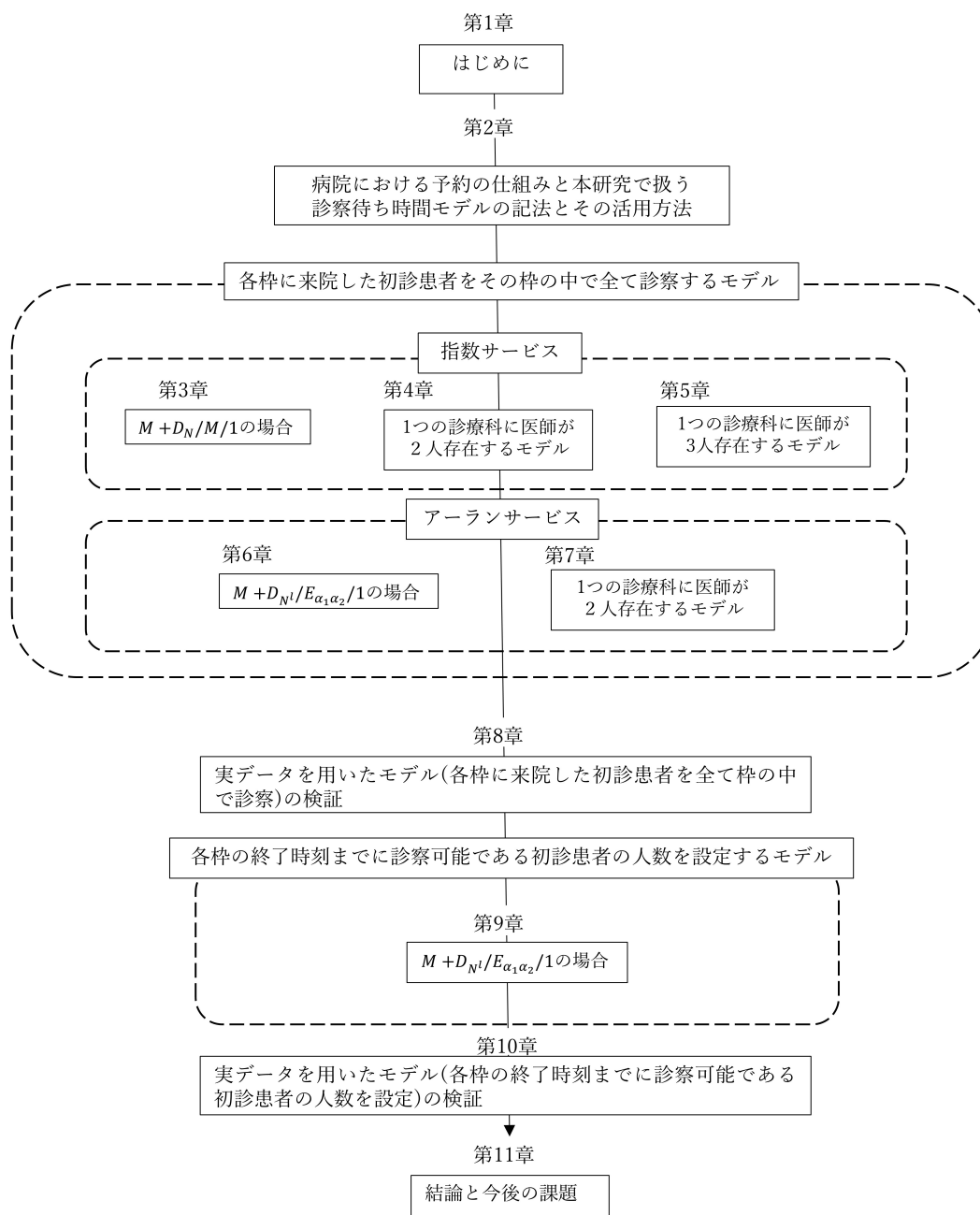


図 1.2: 論文の構成

## 第 2 章

# 病院における予約の仕組みと本研究で扱う診察待ち時間モデルの記法とその活用方法

### 2.1 日本の病院における予約の仕組み

ここで日本の病院における予約の仕組みと本研究で対象となる病院の予約の仕組みに関して具体的に説明する。日本の病院には主に以下の 2 種類の予約制がある。

- (1) 予約し来院する患者のみを診察する (完全予約制)。
- (2) 予約し来院する患者と予約せずに来院する患者を受け入れる。

本研究では後者の病院を対象としている。また、各病院は 1 つの予約枠を 30 分, 60 分等の時間区間で設けており、各診療科は予約枠毎に予約可能な人数を決めている。

次に各患者の詳細を述べる。

- 予約し来院する患者 (予約患者)

事前に予約し来院する患者を指す。この種類の患者は 2 回目以降に来院するため、診療内容が決まっている場合が多く、診察時間が短くなる傾向がある。本研究では予約患者と呼ぶ。

- 予約せずに来院する患者 (初診患者)

診療所から紹介状をもらい来院する患者を指す。この種類の患者は事前に予約せずに来院し、問診による症状の調査や検査等を行う必要があり、診療内容も決まっていない。そのために予約患者よりも診察時間が長くなる傾向がある。本研究では初診患者と呼ぶ。

患者の割り当て方は「同じ枠に来院した患者の中で予約患者を優先的に割り当てる」ものとなる。このことは予約患者と初診患者が同じ予約枠に来院した場合、事前に予約した来院した患者を優先的に割り当てるためである。さらに実際の病院の現場では診察室は混雑しており、診察の空き時間が生じることは稀なことであるため、前の枠の患者の診察終了時刻が次の枠の開始時刻より早い場合、直ぐに次の枠の予約患者の診察を開始すると考える。

また初診患者の割り当て方は2通り考察し、それぞれ「(1) 各時間枠に来院した初診患者を枠の中で全て診察する」と「(2) 各枠の終了時刻までに診察出来る初診患者の人数を制限する」ものを考える。(1)の割り当て方は次の枠の予約患者の診察待ち時間が長くなる傾向があるために、初診患者の優先度が高くなり、予約患者の優先度が低めのものとなる。(2)は初診患者の来院人数が多い場合に初診患者の診察は後ろに回されるために、予約患者の優先度が高めのものとなる。(2)の割り当て方がより現実に近いモデルと言える。第1章から第8章では「(1) 各時間枠に来院した初診患者を枠の中で全て診察する」モデルの作成を行い、第10章以降では「(2) 各枠の終了時刻までに診察出来る初診患者の人数を設定する」モデルの作成を行っている。[9]にある病院では(2)の割り当て方のもと各患者の診察を行っているため、はじめに解析が容易である(1)の割り当て方のモデルを作成し、これをベースとし、(2)のモデルに改良する。

日本の多くの病院が前述した患者の割り当て方(同じ枠に来院した患者の中で予約患者を優先的に割り当てるモデル、初診患者の割り当て方は(1)又は(2))に基づいている。本研究ではこれらのモデルにおいて患者の間の診察の空き時間を考慮しないことを仮定する。そのことで各予約枠における総診察時間の分布等を利用し、各予約枠内での各患者の診察終了時刻の分布が既知の確率計算手法を用いて、計算できるようになり、それを用いて、待ち時間の分布関数を導出できるようになった。また松田ら[16]が1967年に東大病院で外来患者の待ち時間に関して調査した結果、患者はポアソン到着に従い到着し、サービス時間の長さはアーラン分布に従うことが分かった。これに基づき、初診患者がポアソン到着し、各患者のサービス時間の長さはアーラン分布に従うモデルを作成することを目標とする。

そこではじめに第3章から第5章では初診患者の到着がポアソン到着し、サービス時間の長さが、解析が容易な指数分布に従う診察待ち時間モデルの作成を行う。第6章からは第5章までのモデルを拡張し、サービス時間の長さが、アーラン分布に従う診察待ち時間モデルの作成を行う。

## 2.2 診察待ち時間モデルの記法

次に診察待ち時間のモデルを記述する際の記法に関して説明をする。以下2つを本研究における診察待ち時間のモデルの記法とする。

- (a) 1つのモデルで到着の過程  $A$  と過程  $B$  が混在する時、そのモデルの到着の過程を  $A + B$  と記述
- (b)  $k$  人の患者が定時に同時到着する到着過程を  $D^k$  と記述
- (c) サービス時間の長さが従う分布を、2種類の患者のアーラン分布の次数  $\alpha_i$  ( $i \in I$ )(記号の説明は第6章で行う。)を用いて  $E_{\alpha_1, \alpha_2}$  と記述

(a)は先述したように初診患者と予約患者の2種類の患者の到着法則が異なるために導入した。到着法則が2種類混在するため、患者が混合到着する待ち行列モデルに関して解析をしている[12]と[13]を参照した。(c)は第6章以降で患者のサービス時間の長さが異なる次数のアーラン分布に従うため導入した。これらの記法を用いて、第3章(1)と第6章、第10章(2)におけるモデルを記述すると次のようになる。

- (1)  $M + D^N/M/1$

$$(2) M + D^{N^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$$

(1) では初診患者がポアソン到着を仮定しており、予約患者が  $N$  人 (記号の説明は第3章で行う.) 定時に同時到着すると仮定している. そのため到着過程が  $M + D^N$ , サービス時間は指数分布に従うと仮定しているために  $M$ , 医師の数は1人の場合に関して解析するため,  $M + D^N / M / 1$  となる.

(2) では初診患者がポアソン到着を仮定しており、予約患者が  $N^l$  人 (記号の説明は第6章で行う.) 定時に同時到着すると仮定している. そのために到着過程は  $M + D^{N^l}$  となる. サービス時間は種類  $i$  の患者が次数  $\alpha_i$  (記号の説明は第6章で行う.) のアーラン分布に従うと仮定しているために  $E_{\alpha_1, \alpha_2}$  となる. 医師の数は1人場合に関して解析するため,  $M + D^{N^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  となる. 記号も含めたモデルの詳細の説明はそれぞれ各章のはじめに行う. 第4章, 第5章, 第7章, 第8章におけるモデルの説明と記法に関してはそれぞれ各章の初めに行う.

## 2.3 診察待ち時間モデルの活用方法の一例

ここで診察待ち時間モデルの活用方法に関して数値例を用いて説明する. 作成した診察待ち時間モデルは実際に病院に役立てるために作成した. われわれは診察待ち時間の分布関数を導出したため, 各診察室の診察待ち時間が一定時間以内である確率を求めることが出来るようになり, 診察待ち時間の目安の値を算出できるようになった.

具体的な活用方法は次のようになる. あらかじめ予約枠の長さや初診患者の単位時間当たりの来院人数等をデータから予測し, 予約枠の患者数と医師の数をパラメータとして診察待ち時間が一定時間以内である確率を計算する. さらに再び予約枠の長さや初診患者の単位時間当たりの来院人数等をデータから予測し, 予約枠の患者数と医師の数をパラメータとして診察待ち時間が一定時間以内である確率を再計算する. これを繰り返すことにより, 診察待ち時間を一定時間以下にする確率を高くするような, 予約枠の長さや1つの診療科における医師の人数, 各予約枠に予約可能な人数等の設定を行うことが出来る.

ここで予約枠の長さや医師の人数, 各予約枠に予約可能な人数等は診察待ち時間の分布関数のパラメータとなっている. これらは病院の診察待ち時間に関連する要因となっており, 前述した4つを含めた以下の6種類をパラメータとして考えた. 但し, 病院側が設定できるものと, できないものがある. 病院側が設定できないパラメータはデータから推定するパラメータとなる. それぞれまとめると以下のようになる.

### 設定できるパラメータ

- (1) 各予約枠に予約可能な人数
- (2) 1つの診療科における医師の人数
- (3) 1つの予約枠の長さ
- (4) 各枠の診察終了時刻までに診察出来る初診患者の人数 (「各枠の診察終了時刻までに診察出来る初診患者の人数を制限する」モデルのみ)

### データから推定するパラメータ

- (5) 初診患者の単位時間当たりの来院人数 (到着率)

### (6) 予約患者, 初診患者それぞれの平均診察時間

活用例を「(1) 各予約枠に予約可能な人数」を6枠まで設定する例に対して説明する. ここでは「各枠の終了時刻までに診察可能な初診患者の人数を制限する」モデルにより算出される診察待ち時間の分布関数の値を用いて, 診察待ち時間を一定時間以内にする確率を高くするような「(1) 各予約枠に予約可能な人数」を設定する. はじめに予約人数が全ての枠で同じであると仮定し, 計算する.

各パラメータを次のように置く.

#### 設定できるパラメータ

- (1) 各予約枠に予約可能な人数 (全ての枠で同じであると仮定): 6枠まで: 1人から5人, 6枠以降: 0人
- (2) 1つの診療科における医師の人数: 1人
- (3) 1つの予約枠の長さ: 30分
- (4) 各枠の終了時刻までに診察出来る初診患者の人数: 1枠: 1人, 2枠: 2人,..., 6枠: 6人

#### データから推定するパラメータ

- (5) 初診患者の単位時間当たりの来院人数 (到着率): 3(人/時間)
- (6) 予約患者, 初診患者それぞれの平均診察時間: 予約患者 9分, 初診患者 12分

各患者の診察待ち時間の分布関数を用いて, 予約患者の診察待ち時間が40分以下になる確率と初診患者の診察待ち時間が120分以下になる確率が共に0.6以上になるような, 予約患者の人数の上限値を計算する.

計算した結果を表2.1に載せる. 表2.1より各枠の予約患者の人数が5人である時は, 6枠の予約患者の診察待ち時間が40分以内である確率, 初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率が共に0.1以下となるが, 各枠の予約患者の人数が3人であれば6枠の予約患者の診察待ち時間が40分以下になる確率, 初診患者の診察待ち時間が120分以下になる確率が共に0.6以上となることが分かる. したがって各予約枠に予約可能な人数を3人ずつ設定すればよいことが分かる.

次に枠毎に予約可能な人数を変更させた時に, どの時間帯に何人の予約患者を設定すれば, 各枠の各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率を最も高くすることができるのか調べる. 前述した例において, 各枠における予約患者の人数を変更させ (早い時間帯に予約患者の診察人数を多くするか, 遅い時間帯に予約患者の診察人数を多くするか等), 各枠における予約患者の人数を変更させることにより, 各枠における予約患者の診察待ち時間が40分以下になる確率, 初診患者の診察待ち時間が120分以内になる確率が共にどの程度大きくなるか調べる.

6枠までに予約可能な人数が合計  $3 \times 6 = 18$  人であるとし, 各枠における予約患者の人数を変更させながら, 各枠の各患者の診察待ち時間の分布関数の値を計算する. そして各枠の予約患者の診察待ち時間が40分以内, 初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率が最も大きくなるように, 各枠における予約患者の人数を決める.

ここで1枠から6枠までの各枠の予約患者の人数の組み合わせを表2.2のように4通り考察する. それぞれ組み合わせⅠ, 組み合わせⅡ, 組み合わせⅢ, 組み合わせⅣとした. 各組み合わせに対して, 各枠



表 2.1: 予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率

		各枠の予約患者の人数									
		1		2		3		4		5	
		予約 患者	初診 患者	予約 患者	初診 患者	予約 患者	初診 患者	予約 患者	初診 患者	予約 患者	初診 患者
枠 番 号	1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	1.00	0.96	1.00
	2	1.00	1.00	0.96	0.98	0.90	0.95	0.80	0.89	0.64	0.82
	3	1.00	1.00	0.93	0.94	0.86	0.82	0.63	0.69	0.34	0.53
	4	1.00	0.99	0.93	0.91	0.79	0.69	0.43	0.49	0.11	0.24
	5	1.00	0.99	0.94	0.92	0.71	0.64	0.25	0.32	0.03	0.08
	6	1.00	0.96	0.94	0.92	0.63	0.67	0.14	0.23	0.01	0.02

の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率を計算する。

表 2.2: 1 枠から 6 枠までの各枠の予約患者の人数の組み合わせ

		組み合わせ I	組み合わせ II	組み合わせ III	組み合わせ IV
枠 番 号	1	5	4	2	1
	2	5	4	2	1
	3	4	4	2	2
	4	2	2	4	4
	5	1	2	4	5
	6	1	2	4	5

表 2.3 から早い時刻の予約枠に予約可能人数を多く設定した場合 (組み合わせ I, 組み合わせ II) は, 各枠における予約可能人数が同じである場合より, 各枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が低くなる. 理由としては 3 枠の全ての患者の診察終了時刻が 3 枠の終了時刻より大幅に遅れる確率が高いためであると考えられる. これが 6 枠の患者の診察開始時刻まで影響し, 各患者の診察開始時刻が遅れる確率が高くなる. 結果として, 6 枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が低くなる.

遅い時刻の予約枠に予約可能人数を多く設定した場合 (組み合わせ III, 組み合わせ IV) は, 各枠における予約可能人数が同じである場合より, 予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が高くなる. 理由としては 3 枠までの全ての患者の診察の終了時刻が 3 枠の終了時刻より早い時刻となり, 各枠の患者の診察待ち時間は同じ枠に到着した前に並ぶ予約患者の総診察時間のみに影響するためであると考えられる.

また組み合わせ IV により, 各枠の予約患者の人数を設定すると, 全ての枠で予約患者の診察待ち時間

表 2.3: 各枠で予約可能人数が同じである場合と予約患者の各枠の人数を変更させた場合の予約患者の待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率の比較

		各枠で予約可能人数が同じ					
		予約可能人数	予約患者	初診患者			
枠番号	1	3	1.00	1.00			
	2	3	0.90	0.95			
	3	3	0.86	0.82			
	4	3	0.79	0.69			
	5	3	0.71	0.64			
	6	3	0.63	0.67			
		組み合わせⅠ	予約患者	初診患者	組み合わせⅡ	予約患者	初診患者
枠番号	1	5	0.96	1.00	4	0.99	1.00
	2	5	0.64	0.84	4	0.80	0.89
	3	4	0.37	0.64	4	0.63	0.75
	4	2	0.24	0.58	2	0.50	0.65
	5	1	0.32	0.61	2	0.53	0.63
	6	1	0.47	0.67	2	0.55	0.67
		組み合わせⅢ	予約患者	初診患者	組み合わせⅣ	予約患者	初診患者
枠番号	1	2	1.00	1.00	1	1.00	1.00
	2	2	0.96	0.97	1	1.00	0.98
	3	2	0.93	0.85	2	0.95	0.87
	4	4	0.87	0.71	4	0.91	0.73
	5	4	0.80	0.65	5	0.79	0.65
	6	4	0.68	0.67	5	0.70	0.67

が 40 分以内である確率が 0.7 以上, 初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が 0.65 以上となる. 組み合わせ III により各枠の予約患者の人数を設定した際, 5 枠の予約患者の待ち時間が 40 分以内である確率を除いて, 各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率が最も高くなっている. 但し, 組み合わせ IV は 1 枠と 2 枠にそれぞれ 1 人, 5 枠, 6 枠にそれぞれ 5 人設定するために, 各枠の予約可能人数の差が最大で 4 人となりバランスが悪い. そのために組み合わせ III により各枠の予約可能人数を設定すると, 各枠の予約可能人数の差が最大で 2 人であり, 各枠の各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率を比較的大きくすることが出来る.

最後に, 1 つの診療科における医師の人数を増加させることを考える. ある診療科において予約患者の人数を各枠に 5 人ずつ置かなければならない状況を考える. この場合は 1 人の医師で全ての患者を診察

すると各患者の診察待ち時間が長くなるため、医師の人数を増やすことを考える。そこで各診察室の設計に応じて、各枠の各患者の診察待ち時間が短くなるように、医師同士で予約患者と初診患者を診察する人数を分ける必要がある。そのために1つ目の例において、医師の数を2人に増加させ、1人目の医師と2人目の医師で予約患者と初診患者の診察する人数を均等に分けたときの、各医師における予約患者の診察待ち時間が40分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率を計算する。

表 2.4: 各枠に予約可能である人数が5人である時、医師が1人である場合と医師を2人に増加させた場合の予約患者の診察待ち時間が40分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率の比較

		医師が1人		医師が2人	
		予約患者	初診患者	予約患者	初診患者
枠番号	1	0.96	1.00	0.99	1.00
	2	0.64	0.82	0.88	1.00
	3	0.34	0.53	0.79	1.00
	4	0.11	0.24	0.79	0.99
	5	0.03	0.08	0.81	0.99
	6	0.01	0.02	0.85	0.99

ここで初診患者の割り当て方は1人目の医師と2人目の医師で交互に診察すると仮定する。表 2.4 に医師が1人の場合と比較した結果を載せた。医師が2人の場合の、各医師それぞれの予約患者の診察待ち時間が40分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率は、差異が少なかったため、足して2で割った値を載せた。

表 2.4 を見ると各枠の予約患者の人数が5人である時に1人の医師で全ての患者の診察を行うと、6枠の予約患者の診察待ち時間が40分以内である確率、初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率が共に0.1以下となるが、医師が2人の場合における6枠の予約患者の診察待ち時間が40分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が120分以内である確率は共に0.8以上となり改善されていることが分かる。このように医師の数を増やすことにより、診察待ち時間をある一定時間以内に保つことが出来るようになる。

以上の例のように診察待ち時間の分布関数を用いて、各患者の診察待ち時間がある一定時間以内である確率を計算することにより、診察待ち時間を一定時間以内である確率を高くするような各枠の予約可能人数や医師の人数を設定することができる。さらに算出したパラメータを基に、診察室の設計を行うことにより、各患者の診察待ち時間を一定時間以下に保つことが出来るようになる。

## 第 3 章

# $M + D^N/M/1$ の場合

### 3.1 記号の定義とモデルの説明

本稿で扱う診察待ち時間のモデルを説明するにあたり、以下に記号の定義を行う。予約可能な予約枠の添え字集合を  $L$  ( $L = \{1, 2, 3, \dots, l_{max}\}$ ), 1 枠の時間を  $T$  として定義する。時刻 0 を病院の診察開始時刻として定め、予約枠  $l$  (略称  $l$  枠) ( $l \in L$ ) を時間区間  $[(l-1)T, lT)$  として定義する (図 3.1)。そして全ての予約枠は予約で埋まっていると仮定する。患者種類の添字集合を  $I$  とし、 $i = 1$  を予約患者 (事前に予約を取り来院する患者)、 $i = 2$  を初診患者 (予約を取らずに初めて来院する患者) として定義する。種類  $i$  ( $i \in I$ ) の患者の診察時間はパラメータ  $\mu_i$  の指数分布に従うと仮定する。すなわち種類  $i$  の患者一人当たりの診察時間の長さの分布は  $F_{S_{i,k}}(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$  に従い、患者種類でサービス時間が異なる。次に各患者の到着法則と診察順序を示す。

**予約患者：**

予約患者が  $l$  ( $l \in L$ ) 枠に来院する人数を  $N$  人として置き、遅くともその枠の開始時刻には来院している。また、前の枠に来院した患者の診察が全て終了する時刻には診察を受けられるように、十分早めに来院していると仮定する。さらに前の枠の全ての初診患者が診察終了した後 (1 枠においては時刻 0) に、前から順に診察を受ける。

**初診患者：**

パラメータ  $\lambda_2$  のポアソン到着に従い来院し、待ち行列の最後尾に並ぶ。ここで初診患者の診察は連続で行われ、診察の間の空き時間が無いものと仮定する。来院した時間枠の全ての予約患者が診察終了した後に、前から順に診察を受ける。

加えて以下の記号を定義する。

定数

$t_2$  : 初診患者の到着時刻

記号

$C_i^{l*}$  : 予約枠  $l$  に到着する、ある特定の種類  $i$  の患者 (\* により患者 1 人を特定) ( $i \in I, l \in L$ )

確率変数

$S_1^l$  : 予約枠  $l$  に到着する  $N$  人の予約患者の中で  $C_1^{l*}$  より前に並ぶ予約患者の合計

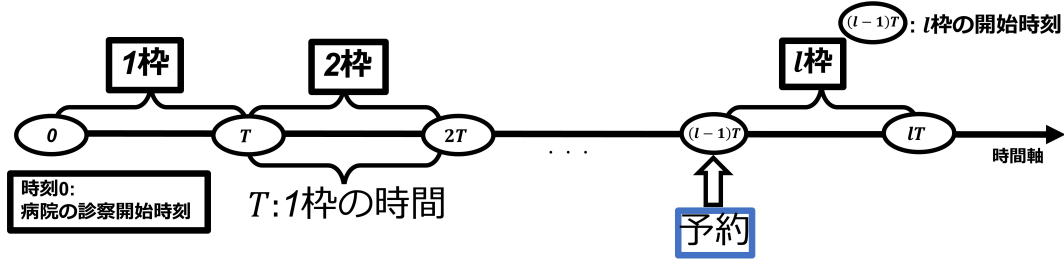


図 3.1: 予約枠

ービス時間 ( $l \in L$ )

$S_{i,k}$ : 病院の診察開始時刻から  $k$  番目に到着した種類  $i$  の患者 1 人当たりのサービス時間 ( $i \in I, l \in L$ )

$E_l$ : 予約枠  $l$  に到着した全ての初診患者のサービス終了時刻 ( $l \in L$ ) (但し,  $E_0 := 0$ )

$E'_l$ : 予約枠  $l$  に到着した全ての予約患者のサービス終了時刻 ( $l \in L$ ) (但し,  $E'_0 := 0$ )

$A_{k,k+1}$ :  $k$  番目に来院する初診患者と  $k+1$  番目に来院する初診患者の到着時間間隔

$N_2(t)$ : 時刻  $t$  までに来院する初診患者の人数

$WT_i^l$ :  $C_i^{l*}$  の待ち時間 ( $i \in I, l \in L$ )

#### パラメータ

$\mu_i$ :  $S_{i,k}$  (種類  $i$  の患者 1 人当たりのサービス時間) が従う指数分布のパラメータ ( $i \in I$ )

$\lambda_2$ : ポアソン過程  $N_2(t)$  のパラメータ

#### 表記

$\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ : 確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_k$  の関数

$F_{\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)}(t)$ :  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の分布関数

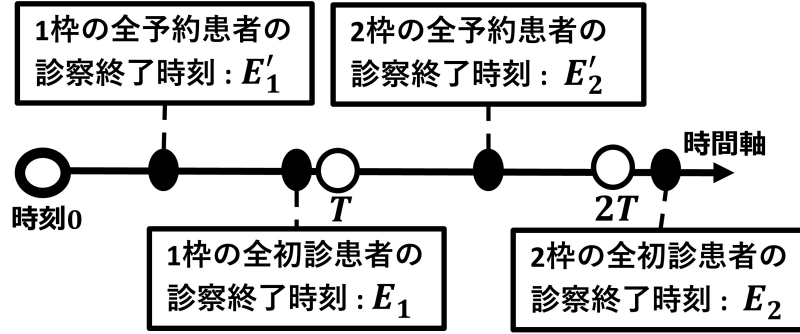
$f_{\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)}(t)$ :  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の密度関数

$M_{\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)}(t)$ :  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の積率母関数

当モデルにおいて初診患者はパラメータ  $\lambda_2$  のポアソン到着することを仮定しているため、到着時間間隔の長さは  $F_{A_{k,k+1}}(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$  ( $t \geq 0$ ) の指数分布に従う。そのためにパラメータ  $\lambda_2$  に従うポアソン過程  $N_2(t)$  を導入する。時刻  $t$  までに  $k$  人来院する事象の確率は  $P(N_2(t) = k) = e^{-\lambda_2 t} (\lambda_2 t)^k / k!$  となる。また患者一人当たりの診察時間は平均  $1/\mu_i$  の指数分布に従う。すなわち患者一人当たりの診察時間の長さは  $F_{S_{i,k}}(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$  に従う。また本研究で考察するモデルの待ち時間は前の枠の患者の診察終了時刻が関係する。具体的には、 $l+1$  枠に来院する予約患者の待ち時間は図 3.2 に示されているように  $l$  枠に来院する全ての初診患者のサービス終了時刻  $E_l$  が関係する。また  $l$  枠に来院する初診患者の待ち時間は図 3.2 に示されている  $l$  枠に来院する全ての予約患者のサービス終了時刻  $E'_l$  が関係する。

ここで、われわれのモデルにおける厳密な待ち行列の流れを見てみる。例えば、1 枠の初診患者の待ち行列は

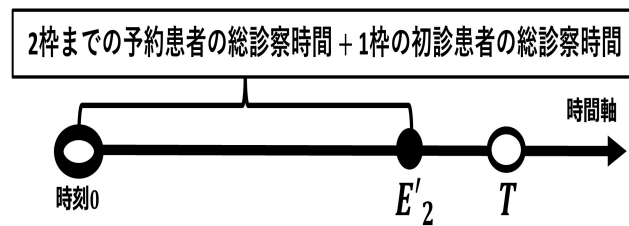
- (1) 予約患者の総診察が 1 枠の終了時刻  $T$  以前に終了

図 3.2:  $E_l, E'_l, lT$  の関係 ( $l = 1, 2$ )

(2) 予約患者の総診察が1枠の終了時刻  $T$  以降に終了

の2つの場合で異なる。(1)の場合、予約患者の診察が終了した時点で初期条件  $N_2(E'_1)$  人の  $M/M/1$ [8] に従い、初診患者の診察が進行する。時刻  $T$  において診察前の初診患者が残っている時は、その残りの患者が続けて診察を受け、それが終わり次第2枠の診察が始まる。時刻  $T$  以前に初診患者の診察が終了した時は、時刻  $T$  より2枠の診察を始める。(2)の場合、予約患者の総診察が終わった時点で  $N_2(T)$  人の初診患者の診察を行い、それが終わり次第2枠の診察を始める。このように各枠の予約患者の待ち行列(独立な確率変数の和)と初診患者の待ち行列( $M/M/1$ の確率法則)を枠を横断し、ランダムな時刻( $E'_l$  や  $E_l$  等)でつなぐ必要があり、それらの解析は極めて困難となる。

そのために本研究では診察の間の空き時間を考慮せずに  $E_l$  と  $E'_l$  を各患者の総サービス時間によって近似的に表示する。そしてこれらを各枠の初診患者と予約患者の診察終了時刻の目安として用いる。但し、このように考えると図 3.3 のような状況が起こり得る。

図 3.3:  $E'_2 < T$  である場合

この場合は2枠の予約患者は1枠に来院し、診察が2枠開始時刻までに終了しているために、本来の2枠の予約患者の意味とは反する。また2枠(時間区間  $[T, 2T)$ )に来院した初診患者の診察は時刻  $E'_2$  から始まる。時刻  $E'_2$  時点では2枠の初診患者は来院していないために、実際の時間軸とずれが生じる。これは  $E_l$  と  $E'_l$  を各患者の総サービス時間として表したことにより生じた矛盾である。これらの矛盾点を解消することはできないが、このような状況はわれわれの作成したモデルの目的とはあまり関係しない。つまりわれわれのモデルは病院が混雑している状況に対して計算を行うことが多いために、大数の法則等を考慮すると、モデル上の矛盾する事象  $\{E'_2 < T\}$  の確率は極めて小さいと考えることが出来る。したがって事象  $\{E'_2 < T\}$  の補集合を考えれば、ある程度現実の診察待ち時間の状況を記述できていると

考えている．そしてわれわれはこのモデルを定められた時間区間に来院した予約患者と初診患者の総診察時間が枠の中であふれているか否かを見ることで，病院の現在の枠の設定が適切であるか判断するための計算を行うツールとして考える．

## 3.2 各患者の診察待ち時間とその分布関数の導出方法

初めに 3.2.1 節と 3.2.2 節で  $WT_1^l$  と  $WT_2^l$  をサービス時間を表す確率変数と  $l$  枠の患者の診察終了時刻を表す確率変数を用いて表す．次に 3.2.3 節と 3.2.4 節において分布関数の導出方法の概要を示す．

### 3.2.1 予約患者の診察待ち時間

次に各患者の診察待ち時間を考察する．予約患者の診察待ち時間を患者が到着してから診察開始時刻までの時間として定義する．

$WT_1^l$  ( $l \in L$ ) に関して考察する．1 枠に来院する予約患者の待ち時間と 2 枠以降に来院する予約患者の待ち時間は異なるためそれぞれ示す．

1 枠の予約患者は時刻 0 に  $N$  人同時到着すると仮定する．また， $C_1^{l*}$  が診察を受ける順番は  $N$  人の中で等確率  $1/N$  で決まると仮定する．そのため  $WT_1^1$  は  $N$  人の中で  $C_1^{1*}$  より前に並ぶ予約患者の合計診察時間  $S_1^1$  となる (図 3.4)．

$l$  枠に来院する予約患者の待ち時間 ( $l \geq 2$ ) は確率変数  $E_l$  を用いることによりあらわすことができ， $(l-1)$  枠に到着した全ての初診患者のサービスが  $l$  枠開始時刻  $(l-1)T$  までに全て終了している時と，終了していない時で異なる．前者の時，予約患者は時刻  $E_{l-1}$  に  $N$  人同時到着すると仮定する．1 枠の時と同様， $C_1^{l*}$  が診察を受ける順番は  $N$  人の中で等確率  $1/N$  で決まるとする．そのため， $WT_1^l$  は同時到着した  $N$  人の中で  $C_1^{l*}$  より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間  $S_1^l$  となる (図 3.5a)．後者の時，予約患者は時刻  $(l-1)T$  に  $N$  人同時到着すると仮定する．時刻  $E_{l-1}$  から  $l$  枠の予約患者の診察が開始される．そのため， $WT_1^l$  は  $C_1^{l*}$  到着時刻の  $(l-1)T$  から  $(l-1)$  枠に到着する患者の全てのサービスが終了する時刻  $E_{l-1}$  までの時間と同時到着した  $N$  人の中で  $C_1^{l*}$  より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間  $S_1^l$  の和になる (図 3.5b)．それぞれの場合を式で表すと次のようになる．

$$WT_1^1 = S_1^1 \quad (3.2.1)$$

$$WT_1^l = \begin{cases} S_1^l & (l \geq 2, E_{l-1} \leq (l-1)T) \\ E_{l-1} - (l-1)T + S_1^l & (l \geq 2, E_{l-1} \geq (l-1)T) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

(3.2.1) 式，(3.2.2) 式をまとめると  $WT_1^l$  は

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (3.2.3)$$

と表すことが出来る．式 (3.2.3) に  $l = 1$  を代入すると， $E_0 := 0$  より  $S_1^1$  となる．また， $l \geq 2$  かつ  $E_{l-1} \leq (l-1)T$  の時  $S_1^l$  となり， $l \geq 2$  かつ  $E_{l-1} \geq (l-1)T$  の時  $E_{l-1} - (l-1)T + S_1^l$  となる．

## 3.2.2 初診患者の診察待ち時間

初診患者の診察待ち時間を患者が到着してから診察開始時刻までの時間として定義する．本研究では、 $C_2^{l*}$  を時刻  $t_2$  ( $(l-1)T \leq t_2 < lT$ ) に到着する患者であると仮定し、 $C_2^{l*}$  の待ち時間を  $WT_2^l$  とする．そして時刻  $t_2$  までに到着する患者の総サービスが時刻  $t_2$  までに終了する時と、終了しない時で異なる．前者の時  $WT_2^l$  は 0 (図 3.6a)，後者の時  $WT_2^l$  は時刻  $t_2$  までに到着する患者の総サービス時間と  $C_2^{l*}$  到着時刻  $t_2$  の差となる (図 3.6b)．ここで、時刻  $t_2$  までに到着する患者の総サービス時間は  $l$  枠に到着する初診患者のサービス終了時刻  $E_l'$  と  $l$  枠に時刻  $t_2$  までの間に到着した全ての初診患者のサービス時間の和として表すことが出来る．それぞれの場合に  $WT_2^l$  は次のようになる．

$$WT_2^l = \begin{cases} 0 & (l \in L, E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2) \\ E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2 & (l \in L, E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \geq t_2) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

(3.2.4) 式は

$$WT_2^l = \max\left\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\right\} \quad (l \in L) \quad (3.2.5)$$

と表すことが出来る．

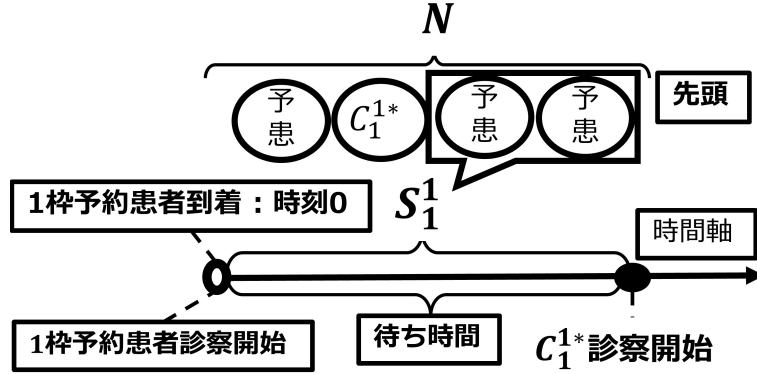
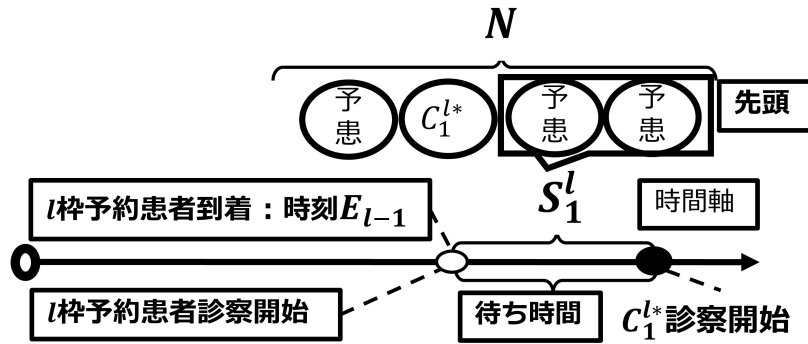
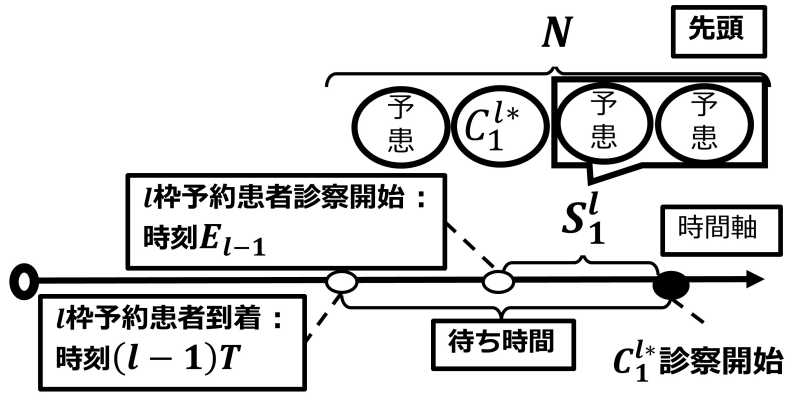


図 3.4: 1 枠に来院する予約患者待ち時間



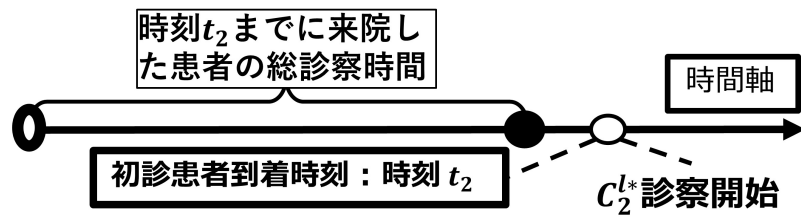


(a)  $l$  枠 ( $l \geq 2$ ) に来院する予約患者診察待ち時間  
( $E_{l-1} \leq (l-1)T$  の時)

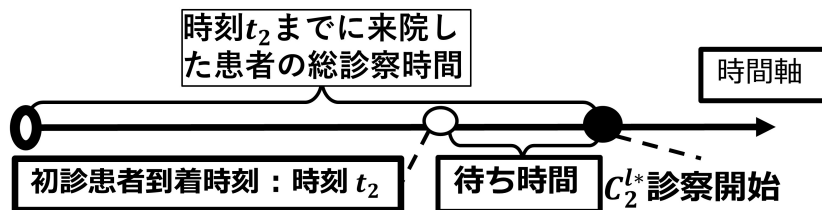


(b)  $l$  枠 ( $l \geq 2$ ) に来院する予約患者診察待ち時間  
( $E_{l-1} \geq (l-1)T$  の時)

図 3.5:  $l$  枠 ( $l \geq 2$ ) に来院する予約患者の診察待ち時間



(a)  $l$  枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間  
( $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2$  の時)



(b)  $l$  枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間  
( $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \geq t_2$  の時)

これらの関係から予約患者と初診患者それぞれの待ち時間の平均値と分散値も計算出来る．これらの計算は付録 C に載せる．

### 3.2.3 予約患者の待ち時間の分布関数の導出方法

予約患者の待ち時間の分布関数を導出する．

$$\begin{aligned} F_{WT_1^l}(t) &= P(WT_1^l \leq t) \\ &= P(\max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \leq t) \end{aligned}$$

$(l-1)T$  を右辺に移項すると

$$\begin{aligned} F_{WT_1^l}(t) &= P(\max\{E_{l-1}, (l-1)T\} + S_1^l \leq t + (l-1)T) \\ &= F_{\max\{E_{l-1}+S_1^l, (l-1)T+S_1^l\}}(t + (l-1)T) \end{aligned}$$

となるため,  $\max\{E_{l-1} + S_1^l, (l-1)T + S_1^l\}$  の分布関数を導出することにより  $WT_1^l$  の分布関数を導出できる．また,

$$\{\max\{E_{l-1} + S_1^l, (l-1)T + S_1^l\} \leq t\} = \{\{E_{l-1} + S_1^l \leq t\} \cap \{(l-1)T + S_1^l \leq t\}\} \quad (3.2.6)$$

が成立する．ここで  $\{E_{l-1} + S_1^l \leq t\} \cap \{(l-1)T + S_1^l \leq t\}$  上での  $(E_{l-1}, S_1^l)$  が形成する領域を  $D$  と置き,  $x := E_{l-1}, y := S_1^l, a := (l-1)T$  とすると, 領域  $D$  は図 3.7 の網掛けの領域となる．ここで

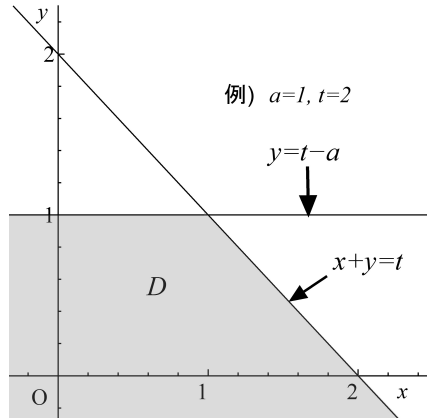


図 3.7: 領域  $D$

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) | -\infty < x \leq a, -\infty < y \leq t - a\} \\ D_2 &= \{(x, y) | a \leq x < \infty, -\infty < y \leq -x + t\} \end{aligned}$$

と置くことにより, 領域  $D$  は領域  $D_1, D_2$  の和集合で表すことが出来る． $E_{l-1}$  と  $S_1^l$  の独立性より領域  $D (= D_1 \cup D_2)$  上で積分すると

$$F_{\max\{E_{l-1}+S_1^l, (l-1)T+S_1^l\}}(t) = \int_{-\infty}^{t-(l-1)T} \int_{-\infty}^{(l-1)T} dF_{E_{l-1}}(x) dF_{S_1^l}(y)$$

$$+ \int_{(l-1)T}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} dF_{S_1^l}(y) dF_{E_{l-1}}(x) \quad (3.2.7)$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned} F_{\max\{E_{l-1}+S_1^l, (l-1)T+S_1^l\}}(t) &= F_{S_1^l}(t - (l-1)T)F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\ &+ \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x)f_{E_{l-1}}(x)dx \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

となる。(3.2.8) 式の第2項の計算を行うために、確率変数  $S_1^l$ ,  $E_{l-1}$ , の分布関数と  $E_{l-1}$  の密度関数を導出する必要がある。3.3節でこれらの関数の導出を行う。

### 3.2.4 初診患者の待ち時間の分布関数の導出方法

次に初診患者の待ち時間の分布関数の計算を行う。

$$\begin{aligned} F_{WT_2^l}(t) &= F_{\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\}}(t) = F_{\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\} - t_2}(t) \\ &= P(\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\} - t_2 \leq t) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$t_2$  を右辺に移項すると、

$$\begin{aligned} F_{WT_2^l}(t) &= P(\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\} \leq t + t_2) \\ &= F_{\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}}(t + t_2) \end{aligned}$$

と表わすことが出来る。

$$\{\max\{\sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\} \leq t\} = \{\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t\} \cap \{t_2 \leq t\}\} \quad (3.2.10)$$

が成立するため、

$$F_{\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}}(t) = P(\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t\} \cap \{t_2 \leq t\}) \quad (3.2.11)$$

となる。 $t_2$  は定数であるため

$$\begin{aligned} &P(\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t\} \cap \{t_2 \leq t\}) \\ &= \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t) & (t \geq t_2) \\ 0 & (t < t_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

となる。(3.2.12) 式より確率変数  $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$ , の分布関数を導出する必要がある。3.3節でこの関数の導出を行う。

### 3.3 確率変数 $E_l, S_1^l, E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(lT)} S_{2,k}$ の分布関数の導出

#### 3.3.1 確率変数 $E_l$ の分布関数の導出

$E_l$  をサービス時間の確率変数を用いて表す.

$$\begin{aligned}
 E_l &= E_{l-1} + \sum_{k=(l-1)N+1}^{lN} S_{1,k} + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(lT)} S_{2,k} \\
 &= E_{l-2} + \sum_{k=(l-2)N+1}^{lN} S_{1,k} + \sum_{k=N_2((l-2)T)+1}^{N_2(lT)} S_{2,k} = \cdots \\
 &= \sum_{k=1}^{lN} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{N_2(lT)} S_{2,k} \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

$E_l$  の分布関数の導出を行う際に確率密度関数と積率母関数の関係を用いた次の手順で分布関数を導出する. この方法の利点を2つ挙げると第1に, 独立な確率変数の和の積率母関数は確率変数の積率母関数の積になることが挙げられる. 通常, 確率変数の和の密度関数を求める際, 和を取る回数分だけ密度関数の畳み込み積分を行うことになり計算が煩雑になる. しかし最初に積率母関数を導出しておけば, 密度関数の畳み込み積分を行う回数を少なくなる. 第2に, 定められた手順に従って解析的に密度関数と分布関数を導出できることである. 積率母関数を用いる事により, 後で述べる手順によって逆ラプラス変換を用いることにより, 解析的に密度関数を導出する事が出来る. 積率母関数を用いずに密度関数を導出した場合, 分布関数を導出した後に不連続点も考慮しながら微分を行う場合もある. さらに不連続な点以外の微分を行う場合も複雑な形になり, まとめることが困難になることが多い. 以上の理由より, 初めに積率母関数を導出し, 逆ラプラス変換を行い密度関数, 分布関数を導出する方法は密度関数, 分布関数を系統的に導出するための良い方法であると言える.

$E_l$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

各ステップ毎の計算過程を示す.

#### 1) $E_l$ の積率母関数を導出.

初めに (3.3.1) 式と  $\sum_{k=1}^{lN} S_{1,k}$  と  $\sum_{k=1}^{N_2(lT)} S_{2,k}$  の独立性より

$$M_{E_l}(s) = E[\exp(s \sum_{k=1}^{lN} S_{1,k})] E[\exp(s \sum_{k=1}^{N_2(lT)} S_{2,k})] \tag{3.3.2}$$

となる.  $\sum_{k=1}^{lN} S_{1,k}$  はパラメータ  $\mu_1$  の指数分布に従う独立な確率変数の和であるため

$$E[\exp(s \sum_{k=1}^{lN} S_{1,k})] = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{lN} \quad (3.3.3)$$

となる. また, 全確率の公式を用いることにより,

$$E[\exp(s \sum_{k=1}^{N_2(lT)} S_{2,k})] = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^j E[\exp(s S_{2,k}) | N_2(lT) = j] P(N_2(lT) = j) \quad (3.3.4)$$

となる.  $S_{2,k}$  はパラメータ  $\mu_2$  の指数分布に従う確率変数であり,  $N_2(lT)$  はパラメータ  $\lambda_2 lT$  のポアソン分布にしたがうため,

$$E[\exp(s \sum_{k=1}^{N_2(lT)} S_{2,k})] = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_2}{\mu_2 - s}\right)^j \frac{(\lambda_2 lT)^j}{j!} \exp(-\lambda_2 lT) \quad (3.3.5)$$

となる. (3.3.3) 式と (3.3.5) 式を (3.3.2) 式に代入しまとめると  $E_l$  の積率母関数は

$$M_{E_l}(s) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{lN} \exp(-\lambda_2 lT + \frac{\mu_2 \lambda_2 lT}{\mu_2 - s}) \quad (3.3.6)$$

となる.

2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

初めに関数の積を逆ラプラス変換した関数は, 逆ラプラス変換した関数の畳み込み積分となる関係より

$$f_{E_l}(t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s}\right)^{lN}\right\}(t-u) \mathcal{L}^{-1}\left\{\exp(-\lambda_2 lT + \frac{\mu_2 \lambda_2 lT}{\mu_2 + s})\right\}(u) du \quad (3.3.7)$$

を得る. ここで,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s}\right)^{lN}\right\} = \mu_1^{lN} \exp(-\mu_1 t) \left(\frac{t^{lN-1}}{(lN-1)!}\right) \quad (3.3.8)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\exp(-\lambda_2 lT + \frac{\mu_2 \lambda_2 lT}{\mu_2 + s})\right\} = \exp(-\lambda_2 lT) \left\{\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\mu_2 t) \frac{(\mu_2 \lambda_2 lT)^k t^{k-1}}{k!(k-1)!}\right\} \quad (3.3.9)$$

である. (3.3.8), (3.3.9) 式を (3.3.7) 式に代入しまとめると

$$\begin{aligned} f_{E_l}(t) = & \mu_1^{lN} \exp(-\lambda_2 lT) \left[ \frac{t^{lN-1} \exp(-\mu_1 t)}{(lN-1)!} + \frac{\exp(-\mu_1 t)}{(lN-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \right. \right. \\ & \times \left. t^p (-1)^{lN-1-p} \frac{(\mu_2 \lambda_2 lT)^k}{k!(k-1)!} \frac{\int_0^{(\mu_1 - \mu_2)t} x^{lN+k-p-2} \exp(x) dx}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \right\} \Big] \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

となる. ここで,

$$\int_0^{(\mu_1 - \mu_2)t} x^{lN+k-p-2} \exp(x) dx = ((\mu_1 - \mu_2)t)^{lN+k-p-2} e^{(\mu_1 - \mu_2)t} +$$

$$\sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \{(-1)^w (lN+k-p-2P_w)((\mu_1 - \mu_2)t)^{lN+k-p-2-w} e^{(\mu_1 - \mu_2)t}\} \\ + (-1)^{lN+k-p-1} (lN+k-p-2)! \quad (3.3.11)$$

と計算できる. (3.3.11) 式の証明は付録 A.1 に載せる. (3.3.11) 式を (3.3.10) 式に代入し, まとめると  $E_l$  の密度関数は

$$f_{E_l}(t) = \frac{e^{-\lambda_2 lT} \mu_1^{lN}}{(lN-1)!} [t^{lN-1} e^{-\mu_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 lT)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \\ \times (-1)^{lN-1-p} \left\{ \frac{t^{lN+k-2} e^{-\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \frac{(-1)^w (lN+k-p-2P_w)}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} t^{lN+k-w-2} e^{-\mu_2 t} \right. \\ \left. + \frac{t^p e^{-\mu_1 t} (-1)^{lN+k-p-1} (lN+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \right\}] \quad (0 \leq t < \infty) \quad (3.3.12)$$

となる.

3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

$E_l$  の分布関数を導出する.

$$F_{E_l}(t) = \int_0^t f_{E_l}(v) dv \\ = \frac{e^{-\lambda_2 lT} \mu_1^{lN}}{(lN-1)!} \left[ \int_0^t v^{lN-1} e^{-\mu_1 v} dv + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 lT)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \right. \\ \times (-1)^{lN-1-p} \left\{ \frac{\int_0^t v^{lN+k-2} e^{-\mu_2 v} dv}{\mu_1 - \mu_2} + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w (lN+k-p-2P_w)}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \int_0^t v^{lN+k-w-2} e^{-\mu_2 v} dv \right) \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^{lN+k-p-1} (lN+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \int_0^t v^p e^{-\mu_1 v} dv \right\} \right] \quad (3.3.13)$$

ここで, (3.3.13) 式を  $\gamma(n+1, \mu_i t)$  を用いてまとめる.  $\gamma(n+1, \mu_i t)$  は不完全ガンマ関数と呼ばれ,  $\gamma(n+1, \mu_i t) := \int_0^{\mu_i t} x^n e^{-x} dx$  である. これより  $E_l$  の分布関数は

$$F_{E_l}(t) = \frac{\mu_1^{lN} e^{-\lambda_2 lT}}{(lN-1)!} \left[ \frac{\gamma(lN, \mu_1 t)}{\mu_1^{lN}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 lT)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \right. \\ \times (-1)^{lN-1-p} \left\{ \frac{\gamma(lN+k-1, \mu_2 t)}{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2^{lN+k-1}} \right. \\ + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \left( \frac{(lN+k-p-2P_w) (-1)^w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \frac{\gamma(lN+k-w-1, \mu_2 t)}{\mu_2^{lN+k-w-1}} \right) \\ \left. \left. + \frac{(lN+k-p-2)! (-1)^{lN+k-p-1}}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \frac{\gamma(p+1, \mu_1 t)}{\mu_1^{p+1}} \right\} \right] \quad (0 \leq t < \infty) \quad (3.3.14)$$

となる.

3.3.2 確率変数  $S_1^l$  の分布関数の導出

次に  $S_1^l$  の分布関数を導出する. 全確率の公式を用いると,

$$\begin{aligned} F_{S_1^l}(t) &= P(S_1^1 \leq t) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} P\left(\sum_{k=1}^j S_{1,k} \leq t\right) P(\{j+1 \text{ 番目に診察を受ける}\}) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

となる.  $C_1^{l*}$  が  $N$  人の中で診察を受ける順番は等確率で決まると仮定するため  $P(\{j+1 \text{ 番目に診察を受ける}\})$  は  $1/N$  となる. さらに,  $S_{1,k}$  は平均  $1/\mu_1$  の指数分布に従う確率変数であるために,  $\sum_{k=1}^j S_{1,k}$  は平均  $j/\mu_1$ , 次数  $j$  のアーラン分布に従う. したがって

$$\begin{aligned} F_{S_1^l}(t) &= \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{N} \left\{ 1 - \exp(-\mu_1 t) \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1 t)^n}{n!} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \exp(-\mu_1 t) \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1 t)^n}{n!} \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

となる.

3.3.3  $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数の導出

$E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  は

$$\begin{aligned} E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} &= E_{l-1} + \sum_{k=(l-1)N}^{lN} S_{1,k} + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \\ &= \sum_{k=1}^{lN} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

と表すことが出来るため, (3.3.17) 式より確率変数  $E_l$  のパラメータ  $lT$  を  $t_2$  と置くと確率変数  $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  と等しくなる. そのため,

$$\begin{aligned} F_{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) &= \\ &= \frac{\mu_1^{lN} e^{-\lambda_2 t_2}}{(lN-1)!} \left[ \frac{\gamma(lN, \mu_1 t)}{\mu_1^{lN}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \right. \\ &\quad \times (-1)^{lN-1-p} \left\{ \frac{\gamma(lN+k-1, \mu_2 t)}{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2^{lN+k-1}} \right. \\ &\quad + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \left( \frac{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-2} P_w}{\mu_2^{lN+k-w-1} (\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \right) \\ &\quad \left. + \frac{(lN+k-p-2)! (-1)^{lN+k-p-1} \gamma(p+1, \mu_1 t)}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1} \mu_1^{p+1}} \right\} \Big] \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

となる.

### 3.4 予約患者、初診患者の待ち時間の分布関数の導出

前章で導出した  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $S_1^l$  と  $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数を用いて予約患者、初診患者それぞれの待ち時間の分布関数を導出する.

#### 3.4.1 予約患者の待ち時間の分布関数の導出

予約患者の待ち時間の分布関数を導出する. (3.2.8) 式の第2項は  $F_{S_1^l}(t) = 0$  ( $t \leq 0$ ) となるため

$$\begin{aligned} & \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &= \int_{(l-1)T}^t \left\{ 1 - \frac{1}{N} \exp(-\mu_1(t-x)) \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t-x))^n}{n!} \right\} f_{E_{l-1}}(x) dx \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

となる. 括弧内を展開し, 第1項を積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &= \int_{(l-1)T}^t f_{E_{l-1}}(x) dx - \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N} \exp(-\mu_1(t-x)) \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t-x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &= F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\ & \quad - \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N} \exp(-\mu_1(t-x)) \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t-x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x) dx \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

となる. ここで  $g_l(t) := \int_{(l-1)T}^t (1/N) \exp(-\mu_1(t-x)) \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \{(\mu_1(t-x))^n/n!\} f_{E_{l-1}}(x) dx$  とし計算すると

$$\begin{aligned} g_l(t) &= \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\mu_1(t-x)} (\mu_1(t-x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &= \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\mu_1(t-x) - \lambda_2(l-1)T} \mu_1^{(l-1)N+n} (t-x)^n}{n! ((l-1)N-1)!} [x^{(l-1)N-1} e^{-\mu_1 x} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 (l-1)T)^k}{k! (k-1)!} \sum_{p=0}^{(l-1)N-1} \binom{(l-1)N-1}{p} \\ & \quad \times (-1)^{(l-1)N-1-p} \left\{ \frac{x^{(l-1)N+k-2} e^{-\mu_2 x}}{\mu_1 - \mu_2} \right. \\ & \quad + \sum_{w=1}^{(l-1)N+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w ((l-1)N+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} x^{(l-1)N+k-w-2} e^{-\mu_2 x} \right) \\ & \quad \left. + \frac{x^p e^{-\mu_1 x} (-1)^{(l-1)N+k-p-1} ((l-1)N+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N+k-p-1}} \right\}] dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\lambda_2(l-1)T} \mu_1^{(l-1)N}}{n!((l-1)N-1)!} [e^{-\mu_1 t} \int_{(l-1)T}^t x^{(l-1)N-1} (\mu_1(t-x))^n dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2(l-1)T)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{(l-1)N-1} \binom{(l-1)N-1}{p} \\
&\quad \times (-1)^{(l-1)N-1-p} \{ e^{-\mu_1 t} \frac{\int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^{(l-1)N+k-2} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx}{\mu_1 - \mu_2} + \\
&\quad \sum_{w=1}^{(l-1)N+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w ((l-1)N+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \right. \\
&\quad \quad \times e^{-\mu_1 t} \int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^{(l-1)N+k-w-2} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx \\
&\quad \left. + \frac{e^{-\mu_1 t} (-1)^{(l-1)N+k-p-1} ((l-1)N+k-p-2)! \int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^p dx}{(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N+k-p-1}} \} \right] \quad (3.4.3)
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^k dx = \mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{1}{s+k+1} \{t^{s+k+1} - (l-1)T^{s+k+1}\} \quad (3.4.4)$$

となる. (3.4.4) 式を (3.4.3) 式に代入しとめると  $g_l(t)$  は

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \int_{(l-1)T}^t \frac{e^{-\mu_1(t-x)}}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t-x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x) dx \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\lambda_2(l-1)T} \mu_1^{(l-1)N}}{n!((l-1)N-1)!} \\
&\quad \times [\mu_1^n e^{-\mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{(t^{s+(l-1)N} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N})}{s + (l-1)N} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2(l-1)T)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{(l-1)N-1} \binom{(l-1)N-1}{p} (-1)^{(l-1)N-1-p} \\
&\quad \times \{ e^{-\mu_1 t} \frac{\int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^{(l-1)N+k-2} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx}{\mu_1 - \mu_2} \\
&\quad + \sum_{w=1}^{(l-1)N+k-p-2} \left\{ \frac{(-1)^w ((l-1)N+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} e^{-\mu_1 t} \right. \\
&\quad \times \int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^{(l-1)N+k-w-2} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx \\
&\quad \left. + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N+k-p-1}} \right. \\
&\quad \left. \times (-1)^{(l-1)N+k-p-1} ((l-1)N+k-p-2)! \} \right] \quad (3.4.5)
\end{aligned}$$

となる. ここで  $s(t; k) := \int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t-x))^n x^k \exp((\mu_1 - \mu_2)x) dx$  とし,  $g_l(t)$  を  $s(t; (l-1)N + k - 2)$ ,  $s(t; (l-1)N + k - w - 2)$  を用いて表記する.  $s(t; k)$  の計算は付録 A.2 で行う.  $g_l(t)$  を  $s(t; k)$  を用いて表記すると

$$\begin{aligned}
g_l(t) = & \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\lambda_2(l-1)T} \mu_1^{(l-1)N}}{n!((l-1)N-1)!} \\
& \times [\mu_1^n e^{-\mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{(t^{s+(l-1)N} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N})}{s + (l-1)N} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 (l-1)T)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{(l-1)N-1} \binom{(l-1)N-1}{p} (-1)^{(l-1)N-1-p} \\
& \times \{e^{-\mu_1 t} \frac{s(t; (l-1)N + k - 2)}{\mu_1 - \mu_2} \\
& + \sum_{w=1}^{(l-1)N+k-p-2} \frac{(-1)^w ((l-1)N+k-p-2 P_w)}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} e^{-\mu_1 t} s(t; (l-1)N + k - w - 2) \\
& + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N+k-p-1}} \\
& \times (-1)^{(l-1)N+k-p-1} ((l-1)N + k - p - 2)! \}] \quad (3.4.6)
\end{aligned}$$

となる. 以上をまとめると, 予約患者の待ち時間の分布関数は

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) = & F_{S_1^l}(t) F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\
& - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t + (l-1)T) \quad (3.4.7)
\end{aligned}$$

となる.

### 3.4.2 初診患者の待ち時間の分布関数の導出

次に初診患者の待ち時間の分布関数を導出する.

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (3.4.8)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
& P(E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) \\
& = \frac{\mu_1^{lN} e^{-\lambda_2 t_2}}{(lN-1)!} \left[ \frac{\gamma(lN, \mu_1(t+t_2))}{\mu_1^{lN}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} (-1)^{lN-1-p} \right. \\
& \quad \times \left. \left\{ \frac{\gamma(lN+k-1, \mu_2 t)}{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2^{lN+k-1}} + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \left( \frac{(lN+k-p-2 P_w) (-1)^w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \frac{\gamma(lN+k-w-1, \mu_2(t+t_2))}{\mu_2^{lN+k-w-1}} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(lN + k - p - 2)!(-1)^{lN+k-p-1}}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \frac{\gamma(p+1, \mu_1(t+t_2))}{\mu_1^{p+1}} \} \} (0 \leq t < \infty) \quad (3.4.9)$$

である．以上が待ち行列モデル  $M + D^N/M/1$  における予約患者と初診患者の診察待ち時間の分布関数の導出となる．

## 第 4 章

# 1 つの診療科に医師が 2 人存在するモデル (指数サービスの場合)

次に 1 つの診療科に医師が 2 人存在する場合のモデルに関して考察する。このモデルは各医師の診察を受ける患者の待ち行列を 2 つ並列させることにより考える。そのため医師の種類により、様々なモデルを考えることができる。医師の種類は次の 3 種類考察することが出来る。

- ① 予約患者のみ診察する
- ② 初診患者のみ診察する
- ③ 予約患者と初診患者を共に診察する

例えば、①と③の医師を組み合わせると医師 1 が予約患者のみ診察し、医師 2 が予約患者と初診患者を診察するモデルとなる。また②と③の医師を組み合わせると医師 1 が初診患者のみ診察し、医師 2 が予約患者と初診患者を診察するモデルとなる。本章ではこれら 3 種類の医師の全ての組み合わせを考察し、モデルを作成する。

ここで 2 人の医師で初診患者を分ける場合は、初診患者を医師 1 と医師 2 で交互に割り当てると仮定する。すなわち奇数番目に来院する初診患者が 1 人目の医師に割り当てられ、偶数番目に来院する初診患者は 2 人目の医師に割り当てられる (図 4.1)。

各モデルに対応する 待ち行列の種類は以下の 5 種類となる。

- (1) 患者種類が予約患者のみである待ち行列モデル  $D^{N_d}/M/1$

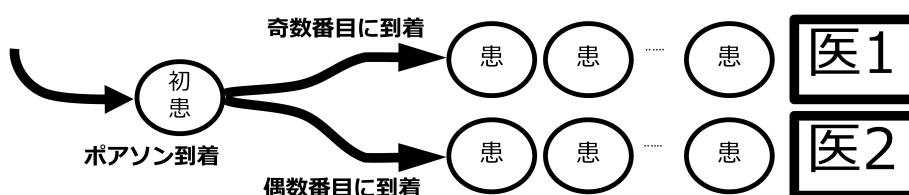


図 4.1: 初診患者の分け方

- (2) 患者種類がポアソン到着に従い来院する初診患者のみである待ち行列モデル  $M/M/1$
- (3) 患者種類が一般の到着過程に従い来院する初診患者のみである待ち行列モデル  $GI/M/1$
- (4) 患者種類が予約患者とポアソン到着に従い来院する初診患者である待ち行列モデル  $M + D^{N_d}/M/1$
- (5) 患者種類が予約患者と一般の到着過程に従い来院する初診患者である待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/M/1$

上から順に見ていくと

- ①の医師に対応する待ち行列モデルは (1)
- ②の医師に対応する待ち行列モデルは (2) と (3)
- ③の医師に対応する待ち行列モデルは (4) と (5)

となる。また待ち行列モデル (2) は、①と②の医師を並列させるモデルの②の医師の診察を受ける患者の待ち行列に対応している。待ち行列モデル (3) は、②と③の医師を並列させるモデルの②の医師の診察を受ける患者の待ち行列に対応している。また待ち行列モデル (4) は、①と③の医師を並列させるモデルの、③の医師の診察を受ける患者の待ち行列に対応している。さらに待ち行列モデル (5) は、②と③の医師、もしくは③と③の医師を並列させるモデルの、③の医師の診察を受ける患者の待ち行列に対応している。

(2) の  $M/M/1$  や (3) の  $GI/M/1$  は厳密な既存の理論があるが、本研究では 3.1 節で説明したように各枠の各患者の診察終了時刻を各患者の総診察時間で表わし、待ち時間の計算を行っているために、この考え方の基で分布関数の導出を行う。そのために待ち行列モデル  $M/M/1$  や  $GI/M/1$  は既存の理論と異なる本研究独自の計算を行う。

待ち時間の分布関数の導出のために次の記号の定義を追加する。

#### 記号の定義

##### 集合

$D$ : 医師の種類の集合

$D = \{1, 2 | d = 1 : 1 \text{ 番目の医師}, d = 2 : 2 \text{ 番目の医師} \}$

##### 定数

$N_d$ : 医師  $d$  が診察を行う予約患者の人数 ( $d \in D, N_1 + N_2 = N$ )

## 4.1 待ち行列モデル $D^{N_d}/M/1$ における予約患者の待ち時間の分布関数の導出

$D^{N_d}/M/1$  のモデルにおける  $WT_1^l$  の予約患者の待ち時間の分布関数を導出する。医師  $d$  の予約患者の待ち時間は

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (4.1.1)$$

となるため、予約患者の待ち時間の分布関数は

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t + (l-1)T - x)f_{E_{l-1}}(x)dx \quad (4.1.2)$$

と表わすことが出来る.

$E_l$  の密度関数と分布関数,  $S_1^l$  の分布関数を導出する.  $E_l$  は平均  $1/\mu_1$  の指数分布の確率変数の  $lN_d$  個の和となるため, 平均  $1/\mu_1$ , 次数が  $lN_d$  のアーラン分布にしたがう. また,  $S_1^l$  の分布関数は 3.3.2 節で算出した (3.3.16) 式の  $N$  を  $N_2$  と置いた関数となる. したがって  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $S_1^l$  の分布関数は次のようになる.

$$f_{E_l}(t) = \frac{\mu_1^{lN_d}}{(lN_d - 1)!} t^{lN_d - 1} e^{-\mu_1 t} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.1.3)$$

$$F_{E_l}(t) = 1 - \exp(-\mu_1 t) \sum_{n=0}^{lN_d - 1} \frac{(\mu_1 t)^n}{n!} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.1.4)$$

$$F_{S_1^l}(t) = 1 - \frac{1}{N_d} \exp(-\mu_1 t) \sum_{j=1}^{N_d - 1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1 t)^n}{n!} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.1.5)$$

(4.1.3) 式と (4.1.5) 式を用いて (4.1.2) 式の第2項の計算を行うと

$$\begin{aligned} \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t - x)f_{E_{l-1}}(x)dx &= \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t - x)f_{E_{l-1}}(x)dx \\ &= \int_{(l-1)T}^t \left\{ 1 - \frac{1}{N_d} \exp(-\mu_1(t - x)) \sum_{j=1}^{N_d - 1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t - x))^n}{n!} \right\} f_{E_{l-1}}(x)dx \\ &= F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N_d} \exp(-\mu_1(t - x)) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N_d - 1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t - x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x)dx \\ &= F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N_d} \exp(-\mu_1(t - x)) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N_d - 1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\mu_1(t - x))^n}{n!} \frac{\mu_1^{(l-1)N_d} x^{(l-1)N_d - 1} e^{-\mu_1 x}}{((l-1)N_d - 1)!} dx \\ &= F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \frac{\mu_1^{(l-1)N_d}}{N_d((l-1)N_d - 1)!} \exp(-\mu_1 t) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N_d - 1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t - x))^n x^{(l-1)N_d - 1} dx}{n!} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} &\int_{(l-1)T}^t (\mu_1(t - x))^n x^{(l-1)N_d - 1} dx \\ &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{t^{n-s} (-1)^s \mu_1^n}{s + (l-1)N_d} \{ t^{s+(l-1)N_d} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_d} \} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

(4.1.7) 式を (4.1.6) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
 & \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx = \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx \\
 & = F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \frac{1}{N_d((l-1)N_d-1)!} \exp(-\mu_1 t) \\
 & \times \sum_{j=1}^{N_d-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{n+(l-1)N_d}}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{t^{n-s}(-1)^s}{s+(l-1)N_d} \{t^{s+(l-1)N_d} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_d}\} \quad (4.1.8)
 \end{aligned}$$

となり, (4.1.8) 式を (4.1.2) 式に代入することにより予約患者の待ち時間の分布関数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 F_{WT_1^l}(t) &= F_{S_1^l}(t) F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\
 &- \frac{\exp(-\mu_1(t + (l-1)T))}{N_d} \sum_{j=1}^{N_d-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{n+(l-1)N_d}}{n!((l-1)N_d-1)!} \\
 &\times \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{(t + (l-1)T)^{n-s}(-1)^s}{s+(l-1)N_d} \{(t + (l-1)T)^{s+(l-1)N_d} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_d}\} \quad (4.1.9)
 \end{aligned}$$

## 4.2 待ち行列モデル $M/M/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出

次に  $M/M/1$  モデルにおける  $WT_2^l$  の分布関数を求める.  $WT_2^l$  は

$$WT_2^l = \max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\} \quad (l \in L) \quad (4.2.1)$$

となるため, 分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

となる. 次に  $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数を求める.  $E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  は

$$E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} = \sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \quad (4.2.3)$$

となるために,  $\sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の密度関数は

$$\begin{aligned}
 f_{\sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\exp(-\lambda_2 t_2 + \frac{\mu_2 \lambda_2 t_2}{\mu_2 + s})\} \\
 &= \exp(-\lambda_2 t_2) \left\{ \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\mu_2 t) \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k t^{k-1}}{k!(k-1)!} \right\} \quad (4.2.4)
 \end{aligned}$$

となる. (4.2.4) 式を積分すると,

$$\begin{aligned} F_{\sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) &= \int_0^t \exp(-\lambda_2 t_2) (\delta(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\mu_2 s) \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k s^{k-1}}{k!(k-1)!}) ds \\ &= \exp(-\lambda_2 t_2) + \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k \int_0^t s^{k-1} \exp(-\mu_2 s) ds}{k!(k-1)!} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

となる. 不完全ガンマ関数を用いてまとめると,  $\sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数は次のようになる.

$$F_{\sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) = \exp(-\lambda_2 t_2) + \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t_2)^k \gamma(\mu_2 t, k)}{k!(k-1)!} \quad (4.2.6)$$

したがって  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.2.7)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} &P(E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) \\ &= \exp(-\lambda_2 t_2) + \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t_2)^k \gamma(\mu_2(t+t_2), k)}{k!(k-1)!} \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

である.

### 4.3 待ち行列モデル $GI/M/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出

次に待ち行列モデル  $GI/M/1$  における  $WT_2^l$  の分布関数を導出する. ここで医師  $d$  のシステムに時刻  $t$  までに来院する初診患者の人数を  $N_{2,d}(t)$  と置き, 医師  $d$  のシステムに  $n$  人目の初診患者が来院する時の時刻を  $S_{n,d}$  として置く. このモデルでは次の2つの場合に関して各患者の待ち時間の分布関数をそれぞれ導出する.

- 奇数番目に来院した初診患者を医師が診察する
- 偶数番目に来院した初診患者を医師が診察する

はじめに  $WT_2^l$  の分布関数の導出手順を示す.

$WT_2^l$  の分布関数の導出手順

- I)  $P(N_{2,d}(t) = n)$  に値を代入せずに  $WT_2^l$  の分布関数を導出.
- II)  $P(N_{2,d}(t) = n)$  を計算.
- III) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}(t) = n)$  の値を代入.



ステップ毎に計算する

I)  $P(N_{2,d}(t) = n)$  に値を代入せずに  $WT_2^l$  の分布関数を導出.

$WT_2^l$  は

$$WT_2^l = \max\{E'_l + \sum_{k=N_{2,d}(t_2-(l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\} \quad (l \in L) \quad (4.3.1)$$

となるため,  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.3.2)$$

である. 次に  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数を導出する.

$E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分することにより,  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数を導出.

ステップ毎に計算する.

1)  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の積率母関数を導出.

$E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  をサービス時間を表す確率変数を用いて表すと次のようになる.

$$E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} = \sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \quad (4.3.3)$$

したがって全確率の公式を用いることにより

$$\begin{aligned} E[\exp(s \sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k})] &= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^j E[\exp(s S_{2,k}) | N_{2,d}(t_2) = j] P(N_{2,d}(t_2) = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \right)^j P(N_{2,d}(t_2) = j) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

を得る.

2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

$$\begin{aligned}
& f_{\sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{P(N_{2,d}(t_2) = 0)\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\mu_2}{\mu_2 + s}\right)^j\right\} P(N_{2,d}(t_2) = j)
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

ここで

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(N_{2,d}(t_2) = 0)\} = P(N_{2,d}(t_2) = 0)\delta(t) \tag{4.3.6}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\mu_2}{\mu_2 + s}\right)^j\right\} = \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} t^{j-1} \exp(-\mu_2 t) \tag{4.3.7}$$

したがって

$$f_{\sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}}(t) = P(N_{2,d}(t_2) = 0)\delta(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} t^{j-1} \exp(-\mu_2 t) P(N_{2,d}(t_2) = j) \tag{4.3.8}$$

となる.

3) 密度関数を積分することにより,  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数を導出.

(4.3.8) 式を積分すると

$$\begin{aligned}
F_{\sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}}(t) &= \int_0^t \{P(N_{2,d}(t_2) = 0)\delta(s) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} s^{j-1} \exp(-\mu_2 s) P(N_{2,d}(t_2) = j)\} ds \\
&= \int_0^t P(N_{2,d}(t_2) = 0)\delta(s) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} P(N_{2,d}(t_2) = j) \int_0^t s^{j-1} \exp(-\mu_2 s) ds
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

となる. 不完全ガンマ関数の表記を用いて表記すると  $\sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数は

$$F_{\sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}}(t) = P(N_{2,d}(t_2) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2 t, j)}{(j-1)!} P(N_{2,d}(t_2) = j) \tag{4.3.10}$$

となる. したがって  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{4.3.11}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}
& P(E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) = P(N_{2,d}(t_2) = 0) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), j)}{(j-1)!} P(N_{2,d}(t_2) = j) \quad (0 \leq t < \infty)
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

である.

II)  $P(N_{2,d}(t) = n)$  を計算.

次に医師  $d (d \in D)$  のシステムに時刻  $t$  までに  $n$  人初診患者が来院する確率を計算する ([23] 参照). 次の2つの場合においてそれぞれ到着法則を見る.

- 奇数番目に来院する初診患者のみ取り出す
- 偶数番目に来院する初診患者のみ取り出す

1つ目から見る.

- 奇数番目に来院する初診患者のみ取り出す

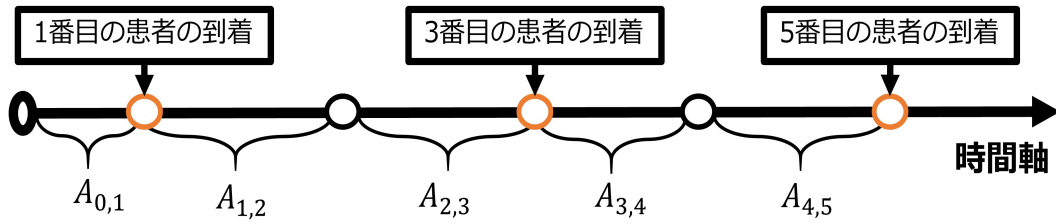


図 4.2: 奇数番目に来院する初診患者の到着時間間隔

図 4.2 より, 1 番目の患者が到着するまでの時間  $A_{0,1}$  は平均  $1/\lambda_2$  の指数分布に従い, 2 番目以降の患者が到着するまでの時間  $A_{2i-1,2i} + A_{2i,2i+1}$  ( $i \geq 1$ ) は平均  $2/\lambda_2$ , 次数 2 のアーラン分布に従うことが分かる. したがって, 奇数番目に来院する初診患者は 1 番目の初診患者の到着までが指数分布, 以降の到着時間間隔は平均  $2/\lambda_2$ , 次数 2 のアーラン分布にしたがう遅延再生過程 [23] に基づき来院する.

- 偶数番目に来院する初診患者のみ取り出す

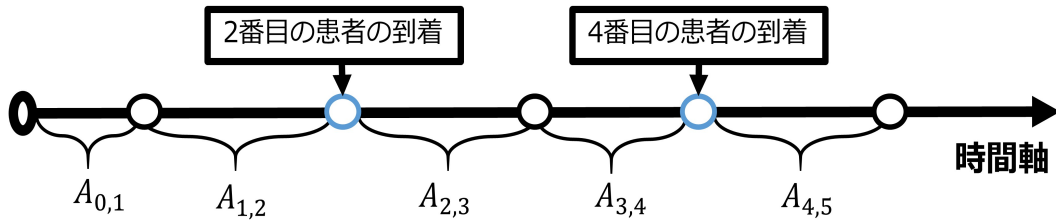


図 4.3: 偶数番目に来院する初診患者の到着時間間隔

図 4.3 より, 初診患者の到着時間間隔  $A_{2i,2i+1} + A_{2i+1,2i+2}$  ( $i \geq 0$ ) は平均  $2/\lambda_2$ , 次数 2 のアーラン分布に従うことが分かる. したがって, 偶数番目に来院する初診患者は到着時間間隔が平均  $2/\lambda_2$ , 次数 2 のアーラン分布にしたがう再生過程 [23] に基づき来院する.

$$N_{2,d}(t) = \max\{n : S_{n,d} < t\} \quad (4.3.13)$$

であるため,  $N_{2,d}(t) \geq n \Leftrightarrow S_{n,d} \leq t$  が成立する. このことより

$$P(N_{2,d}(t) \geq n) = P(S_{n,d} \leq t) \quad (4.3.14)$$

が成立するため,

$$P(N_{2,d}(t) = n) = P(S_{n,d} \leq t) - P(S_{n+1,d} \leq t) \quad (4.3.15)$$

となる. ここで  $S_{n,d}$  ( $d = 1, 2$ ) を  $A_{i,i+1}$  を用いて表すとそれぞれ次のようになる.

$$S_{n,1} = A_{0,1} + A_{1,2} + \cdots + A_{2n-2,2n-1} \quad (4.3.16)$$

$$S_{n,2} = A_{0,1} + A_{1,2} + \cdots + A_{2n-1,2n} \quad (4.3.17)$$

したがって  $S_{n,1}$  は次数  $2n - 1$  のアーラン分布にしたがい,  $S_{n,2}$  は次数  $2n$  のアーラン分布にしたがう. (4.3.15) 式より

$$\begin{aligned} P(N_{2,1}(t) = n) &= P(S_{n,1} \leq t) - P(S_{n+1,1} \leq t) \\ &= 1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} - (1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^{2n} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!}) \\ &= \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=2n-1}^{2n} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

となる. ここで  $P(N_{2,1}(t) = 0) = \exp(-\lambda_2 t)$  である. 同様に

$$P(N_{2,2}(t) = n) = \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=2n}^{2n+1} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \quad (4.3.19)$$

となる.

III) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}(t) = n)$  の値を代入.

(4.3.12) 式に II) で計算した値をそれぞれ代入する.  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.3.20)$$

$d = 1, 2$  でそれぞれ次のようになる.

- $d = 1$

$$F_{\sum_{k=1}^{N_{2,1}(t_2)} S_{2,k}}(t) = \exp(-\lambda_2 t_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2 t, j)}{(j-1)!} \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{i=2j-1}^{2j} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} \quad (4.3.21)$$

- $d = 2$

$$F_{\sum_{k=1}^{N_{2,2}(t_2)} S_{2,k}}(t) = (1 + \lambda_2 t_2) \exp(-\lambda_2 t_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2 t, j)}{(j-1)!} \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{i=2j}^{2j+1} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} \quad (4.3.22)$$

#### 4.4 待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/M/1$ における予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の分布関数の導出

$GI + D^{N_d}/M/1$  モデルを2つ並列させると図4.4のようなモデルとなる. そのために奇数番目に来院した初診患者を医師が診察する場合と, 偶数番目に来院した初診患者を医師が診察する場合の各患者の待ち時間の分布関数をそれぞれ計算する.

次の手順で分布関数を導出する.

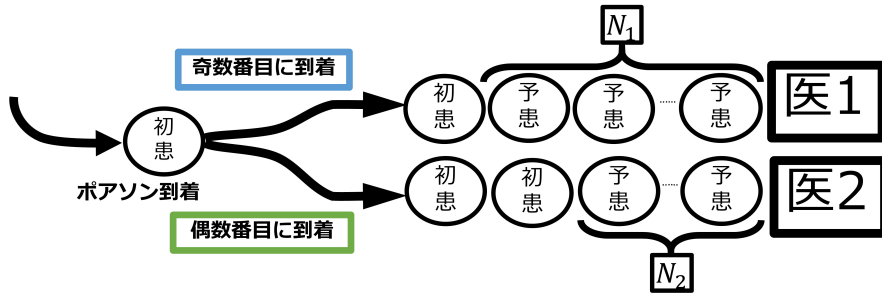


図4.4: 待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/M/1$  を2つ並列させる場合

$GI + D^{N_d}/M/1$  のモデルにおける  $WT_i^l$  ( $i \in I, l \in L$ ) の分布関数の導出手順

- I)  $P(N_{2,d}(t) = n)$  に値を代入せずに  $WT_i^l$  の分布関数を導出.
- II) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}(t) = n)$  の値を代入.

ステップ毎に計算する.

- I)  $P(N_{2,d}(t) = n)$  に値を代入せずに  $WT_i^l$  の分布関数を導出.

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (4.4.1)$$

$$WT_2^l = \max\{E_l' + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\} \quad (l \in L) \quad (4.4.2)$$

$S_1^l$  の分布関数が (3.3.16) 式の  $N$  を  $N_d$  として置いた関数であるため,  $WT_1^l$  の分布関数は (3.4.2) 式の  $N$  を  $N_d$  と置いた形となる. また  $WT_2^l$  の分布関数は (3.2.11) 式の  $N_2(t)$  を  $N_{2,d}(t)$  と置いた形になるためにそれぞれ次の関数となる.

$$\begin{aligned} F_{WT_1^l}(t) &= F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\ &\quad - \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{1}{N_d} \exp(-\mu_1(t + (l-1)T - x)) \end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_d-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\{\mu_1(t + (l-1)T - x)\}^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x) dx \quad (4.4.3)$$

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.4.4)$$

(4.4.3), (4.4.4) 式より  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)}$  の分布関数を導出することにより  $WT_i^l$  ( $i \in I, l \in L$ ) の分布関数を導出できる. 次に  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)}$  の分布関数を導出する. はじめに  $E_l$  の密度関数と分布関数を導出する.

$E_l$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

各ステップ毎に計算する.

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.

$E_l$  をサービス時間を表す確率変数を用いて表す.

$$E_l = \sum_{k=1}^{lN_d} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}(lT)} S_{2,k} \quad (4.4.5)$$

$$M_{E_l}(s) = E[\exp(s \sum_{k=1}^{lN_d} S_{1,k})] E[\exp(s \sum_{k=1}^{N_{2,d}(lT)} S_{2,k})] \quad (4.4.6)$$

全確率の公式より

$$E[\exp(s \sum_{k=1}^{N_{2,d}(lT)} S_{2,k})] = P(N_{2,d}(lT) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \right)^j P(N_{2,d}(lT) = j) \quad (4.4.7)$$

を得る. したがって  $E_l$  の積率母関数は

$$M_{E_l}(s) = P(N_{2,d}(lT) = 0) \left( \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \right)^{lN_d} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \right)^{lN_d} \left( \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \right)^j P(N_{2,d}(lT) = j) \quad (4.4.8)$$

となる.

- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

$$f_{E_l}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{M_{E_l}(-s)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1}\{P(N_{2,d}(lT) = 0)(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s})^{lN_d} + \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{\mu_1}{\mu_1 + s})^{lN_d} (\frac{\mu_2}{\mu_2 + s})^j P(N_{2,d}(lT) = j)\} \\
&= P(N_{2,d}(lT) = 0)\mathcal{L}^{-1}\{(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s})^{lN_d}\} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\{(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s})^{lN_d} (\frac{\mu_2}{\mu_2 + s})^j\} P(N_{2,d}(lT) = j) \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\{(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s})^{lN_d} (\frac{\mu_2}{\mu_2 + s})^j\} \\
&= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{(\frac{\mu_1}{\mu_1 + s})^{lN_d}\}(t-u) \mathcal{L}^{-1}\{(\frac{\mu_2}{\mu_2 + s})^j\}(u) du \\
&= \int_0^t \mu_1^{lN_d} \frac{(t-u)^{lN_d-1} e^{-\mu_1(t-u)}}{(lN_d-1)!} \mu_2^j \frac{u^{j-1} e^{-\mu_2 u}}{(j-1)!} du \\
&= \frac{\mu_1^{lN_d} \mu_2^j e^{-\mu_1 t}}{(lN_d-1)!(j-1)!} \int_0^t (t-u)^{lN_d-1} u^{j-1} e^{(\mu_1-\mu_2)u} du \\
&= \frac{\mu_1^{lN_d} \mu_2^j \exp(-\mu_1 t)}{(lN_d-1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} \frac{t^{lN_d-1-s} (-1)^s}{(\mu_1-\mu_2)^{s+j}} \{((\mu_1-\mu_2)t)^{s+j-1} e^{(\mu_1-\mu_2)t} \\
&\quad + \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w ((\mu_1-\mu_2)t)^{s+j-1-w} e^{(\mu_1-\mu_2)t} + (-1)^{s+j} (s+j-1)!\} \\
&= \frac{\mu_1^{lN_d} \mu_2^j}{(lN_d-1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} (-1)^s \{ \frac{t^{lN_d+j-2} e^{-\mu_2 t}}{\mu_1-\mu_2} \\
&\quad + \sum_{w=1}^{s+j-1} (s+j-1)P_w \frac{(-1)^w t^{lN_d+j-2-w} e^{-\mu_2 t}}{(\mu_1-\mu_2)^{1+w}} + \frac{t^{lN_d-1-s} e^{-\mu_1 t} (-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1-\mu_2)^{s+j}} \} \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

となる. (4.4.10) 式を (4.4.9) 式に代入すると  $E_l$  の密度関数は

$$\begin{aligned}
f_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_d}}{(lN_d-1)!} [t^{lN_d-1} e^{-\mu_1 t} P(N_{2,d}(lT) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} \\
&\quad \times (-1)^s \{ \frac{t^{lN_d+j-2} e^{-\mu_2 t}}{\mu_1-\mu_2} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \frac{(-1)^w (s+j-1)P_w}{(\mu_1-\mu_2)^{1+w}} t^{lN_d+j-2-w} e^{-(\mu_2 t)} \\
&\quad + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1-\mu_2)^{s+j}} t^{lN_d-1-s} \exp(-\mu_1 t) \} P(N_{2,d}(lT) = j)] \quad (4.4.11)
\end{aligned}$$

となる.

3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

(4.4.11) 式を積分する.

$$\begin{aligned}
F_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_d}}{(lN_d-1)!} [\int_0^t u^{lN_d-1} e^{-\mu_1 u} du P(N_{2,d}(lT) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} \\
&\quad \times (-1)^s \{ \frac{\int_0^t u^{lN_d+j-2} e^{-\mu_2 u} du}{\mu_1-\mu_2} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \frac{(-1)^w (s+j-1)P_w}{(\mu_1-\mu_2)^{1+w}} \int_0^t u^{lN_d+j-2-w} e^{-\mu_2 u} du \\
&\quad + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1-\mu_2)^{s+j}} \int_0^t u^{lN_d-1-s} e^{-\mu_1 u} du \} P(N_{2,d}(lT) = j)]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \int_0^t u^{lN_d-1-s} e^{-\mu_1 u} du \} P(N_{2,d}(lT) = j)] \quad (4.4.12)$$

不完全ガンマ関数の表記を用いると  $E_l$  の分布関数は

$$\begin{aligned} F_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_d}}{(lN_d - 1)!} \left[ \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_d)}{\mu_1^{lN_d}} P(N_{2,d}(lT) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} \right. \\ &\quad \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_d + j - 1)}{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2^{lN_d+j-1}} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \left( \frac{(-1)^w {}_{s+j-1}P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_d + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_d+j-1-w}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_d + s)}{\mu_1^{lN_d+s}} \right\} P(N_{2,d}(lT) = j) \right] \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

となる.

次に  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数を導出する.  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  は次のようになる.

$$E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} = \sum_{k=1}^{lN} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \quad (4.4.14)$$

$E_l$  のパラメータ  $lT$  を  $t_2$  と置くと確率変数  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  と等しくなることがわかる. そのため,  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数は  $E_l$  の分布関数のパラメータ  $lT$  を  $t_2$  と置いた分布関数と等しい. このことより,  $E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}$  の分布関数は

$$\begin{aligned} &F_{E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k}}(t) \\ &= \frac{\mu_1^{lN_d}}{(lN_d - 1)!} \left[ \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_d)}{\mu_1^{lN_d}} P(N_{2,d}(t_2) = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} \right. \\ &\quad \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_d + j - 1)}{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2^{lN_d+j-1}} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \left( \frac{(-1)^w {}_{s+j-1}P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_d + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_d+j-1-w}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_d + s)}{\mu_1^{lN_d+s}} \right\} P(N_{2,d}(t_2) = j) \right] \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

となる.

$WT_1^l$  の分布関数を導出する. (4.4.3) 式の  $\int_{(l-1)T}^t (1/N_d) \exp(-\mu_1(t-x)) \sum_{j=1}^{N_d-1} \sum_{n=0}^{j-1} ((\mu_1(t-x))^n/n!) f_{E_{l-1}}(x) dx$  を  $g_l(t)$  と置くと次のようになる.

$$\begin{aligned} g_l(t) &= \frac{1}{N_d} \sum_{j=1}^{N_d-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{(l-1)N_d}}{n!((l-1)N_d-1)!} [P(N_{2,d}((l-1)T) = 0) \\ &\quad \times e^{-\mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \mu_1^n t^{n-s} (-1)^s \frac{(t^{s+(l-1)N_d} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_d})}{s + (l-1)N_d} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_2^k P(N_{2,d}((l-1)T) = k)}{(k-1)!} \sum_{p=0}^{(l-1)N_d-1} \binom{(l-1)N_d-1}{p} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times (-1)^{(l-1)N_d-1-p} \left\{ \frac{s(t; (l-1)N_d + k - 2)e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 - \mu_2} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{(l-1)N_d+k-p-2} \frac{(-1)^w ((l-1)N_d+k-p-2)P_w e^{-\mu_1 t}}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} s(t; (l-1)N_d + k - w - 2) \\
& + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N_d+k-p-1}} \\
& \left. \times (-1)^{(l-1)N_d+k-p-1} ((l-1)N_d + k - p - 2)! \right\} \quad (4.4.16)
\end{aligned}$$

$WT_1^l$  の分布関数は

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) = & F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\
& - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t + (l-1)T) \quad (4.4.17)
\end{aligned}$$

となる.  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.4.18)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}
& P(E_l' + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) = P(N_{2,d}(t_2) = 0) \frac{\gamma(\mu_1(t + t_2), lN_d)}{(lN_d - 1)!} \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{lN_d} \mu_2^j}{(lN_d - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_d-1} \binom{lN_d-1}{s} (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), lN_d + j - 1)}{\mu_2^{lN_d+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), lN_d + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_d+j-1-w}(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \\
& \left. - \frac{\gamma(\mu_1(t + t_2), lN_d + s)(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{\mu_1^{lN_d+s}(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \right\} P(N_{2,d}(t_2) = j) \quad (4.4.19)
\end{aligned}$$

である.

II) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}(t) = n)$  の値を代入.

I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,1}(t) = n)$ ,  $P(N_{2,2}(t) = n)$  の値を代入し, 奇数番目に来院する初診患者を診察する待ち行列モデル  $GI + D^{N_1}/M/1$ , 偶数番目に来院する初診患者を診察する待ち行列モデル  $GI + D^{N_2}/M/1$  それぞれにおける予約患者の待ち時間  $WT_1^l$  の分布関数と初診患者の待ち時間  $WT_2^l$  の分布関数を導出する.

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) = & F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\
& - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t + (l-1)T) \quad (4.4.20)
\end{aligned}$$

$d = 1, 2$  で  $E_l$  の分布関数と関数  $g_l(t)$  はそれぞれ次のようになる.

- $d = 1$

$$\begin{aligned}
F_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_1}}{(lN_1 - 1)!} e^{-\lambda_2 lT} \left[ \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_1)}{\mu_1^{lN_1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_1-1} \binom{lN_1-1}{s} \right. \\
&\quad \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_1 + j - 1)}{\mu_2^{lN_1+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \left( \frac{(-1)^w (s+j-1)P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_1 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_1+j-1-w}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_1 + s)}{\mu_1^{lN_1+s}} \right\} \sum_{i=2j-1}^{2j} \frac{(\lambda_2 lT)^i}{i!} \right] \quad (4.4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{(l-1)N_1}}{n!((l-1)N_1 - 1)!} \\
&\quad \times [\mu_1^n e^{-\lambda_2(l-1)T - \mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{(t^{s+(l-1)N_1} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_1})}{s + (l-1)N_1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2k-1}^{2k} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i}{i!} e^{-\lambda_2(l-1)T} \frac{\mu_2^k}{(k-1)!} \sum_{p=0}^{(l-1)N_1-1} \binom{(l-1)N_1-1}{p} \\
&\quad \times (-1)^{(l-1)N_1-1-p} \left\{ \frac{s(t; (l-1)N_1 + k - 2)e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \right. \\
&\quad \sum_{w=1}^{(l-1)N_1+k-p-2} \frac{(-1)^w ((l-1)N_1+k-p-2)P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} e^{-\mu_1 t} s(t; (l-1)N_1 + k - w - 2) \\
&\quad \left. + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N_1+k-p-1}} \right. \\
&\quad \left. \times (-1)^{(l-1)N_1+k-p-1} ((l-1)N_1 + k - p - 2)! \right] \quad (4.4.22)
\end{aligned}$$

- $d = 2$

$$\begin{aligned}
F_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_2} e^{-\lambda_2 lT}}{(lN_2 - 1)!} \left[ (1 + \lambda_2 lT) \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_2)}{\mu_1^{lN_2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_2-1} \binom{lN_2-1}{s} \right. \\
&\quad \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_2 + j - 1)}{\mu_2^{lN_2+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \left( \frac{(-1)^w (s+j-1)P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_2 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_2+j-1-w}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_2 + s)}{\mu_1^{lN_2+s}} \right\} \sum_{i=2j}^{2j+1} \frac{(\lambda_2 lT)^i}{i!} \right] \quad (4.4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{(l-1)N_2}}{n!((l-1)N_2 - 1)!} \\
&\quad \times [(1 + \lambda_2(l-1)T) e^{-\lambda_2(l-1)T - \mu_1 t} \mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(t^{s+(l-1)N_2} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_2})}{s + (l-1)N_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=2k}^{2k+1} \frac{\mu_2^k (\lambda_2 (l-1)T)^i}{i!(k-1)!} e^{-\lambda_2 (l-1)T} \\
& \times \sum_{p=0}^{(l-1)N_2-1} \binom{(l-1)N_2-1}{p} (-1)^{(l-1)N_2-1-p} \left\{ \frac{s(t; (l-1)N_2 + k - 2)e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \right. \\
& \sum_{w=1}^{(l-1)N_2+k-p-2} \frac{(-1)^w ((l-1)N_2+k-p-2)P_w e^{-\mu_1 t}}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} s(t; (l-1)N_2 + k - w - 2) \\
& + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N_2+k-p-1}} \\
& \left. \times (-1)^{(l-1)N_2+k-p-1} ((l-1)N_2 + k - p - 2)! \right\} \quad (4.4.24)
\end{aligned}$$

$WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (4.4.25)$$

$d = 1, 2$  でそれぞれ次のようになる.

- $d = 1$

$$\begin{aligned}
P(E'_l + \sum_{k=N_{2,1}((l-1)T)+1}^{N_{2,1}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) &= \frac{\gamma(\mu_1(t + t_2), lN_1) e^{-\lambda_2 t_2}}{(lN_1 - 1)!} \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{lN_1} \mu_2^j}{(lN_1 - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_1-1} \binom{lN_1-1}{s} (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), lN_1 + j - 1)}{\mu_2^{lN_1+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), lN_1 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_1+j-1-w}(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} - \\
&\left. \frac{\gamma(\mu_1(t + t_2), lN_1 + s)(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{\mu_1^{lN_1+s}(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \right\} \sum_{i=2j-1}^{2j} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t_2} \quad (4.4.26)
\end{aligned}$$

- $d = 2$

$$\begin{aligned}
P(E'_l + \sum_{k=N_{2,2}((l-1)T)+1}^{N_{2,2}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) &= (1 + \lambda_2 t_2) \frac{\gamma(\mu_1(t + t_2), lN_2) e^{-\lambda_2 t_2}}{(lN_2 - 1)!} \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{lN_2} \mu_2^j}{(lN_2 - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_2-1} \binom{lN_2-1}{s} (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), lN_2 + j - 1)}{\mu_2^{lN_2+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), lN_2 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_2+j-1-w}(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} - \\
&\left. \frac{\gamma(\mu_1(t + t_2), lN_2 + s)(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{\mu_1^{lN_2+s}(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \right\} \sum_{i=2j}^{2j+1} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t_2} \quad (4.4.27)
\end{aligned}$$

## 第 5 章

# 1 つの診療科に医師が 3 人存在するモデル (指数サービスの場合)

次に 1 つの診療科に医師が 3 人存在する場合のモデルに関して考察する. 医師の種類は次の 3 種類である.

- ① 予約患者のみ診察する
- ② 初診患者のみ診察する
- ③ 予約患者と初診患者を共に診察する

これら 3 人の医師の全ての組み合わせを考察し, モデルを作成する. 例えば, ②の医師を 2 人, ③の医師を 1 人組み合わせるモデルや①, ②, ③の医師を 1 人ずつ組み合わせるモデルが考えられる.

ここで初診患者を 3 人の医師で分ける場合は, 1 人目の医師に  $3n - 2$  ( $n \geq 1$ ) 番目に来院する初診患者, 2 人目の医師に  $3n - 1$  番目に来院する初診患者, 3 人目の医師に  $3n$  番目に来院する初診患者を割り当てると仮定する.

各モデルに対応する 待ち行列の種類は以下の 5 種類となる.

- (1) 患者種類が予約患者のみである待ち行列モデル  $D^{Na}/M/1$
- (2) 患者種類がポアソン到着に従い来院する初診患者のみである待ち行列モデル  $M/M/1$
- (3) 患者種類が一般の到着過程に従い来院する初診患者のみである待ち行列モデル  $GI/M/1$
- (4) 患者種類が予約患者とポアソン到着に従い来院する初診患者である待ち行列モデル  $M + D^{Na}/M/1$
- (5) 患者種類が予約患者と一般の到着過程に従い来院する初診患者である待ち行列モデル  $GI + D^{Na}/M/1$

さらに (3), (5) の待ち行列はそれぞれ次の 5 つの場合に分けられる.

- $2n - 1$  番目に来院する初診患者を診察する場合
- $2n$  番目に来院する初診患者を診察する場合
- $3n - 2$  番目に来院する初診患者を診察する場合

- $3n - 1$  番目に来院する初診患者を診察する場合
- $3n$  番目に来院する初診患者を診察する場合

本章では  $3n - 2$  番目に来院する初診患者を診察する場合,  $3n - 1$  番目に来院する初診患者を診察する場合, と  $3n$  番目に来院する初診患者を診察する場合の各患者の待ち時間の分布関数を導出する. ここで次の記号を追加する.

#### 記号の定義

##### 集合

$D$ : 医師の種類集合

$D = \{1, 2, 3 \mid d = 1 : 1 \text{ 番目の医師}, d = 2 : 2 \text{ 番目の医師}, d = 3 : 3 \text{ 番目の医師}\}$

##### 定数

$N_d$ : 医師  $d$  が診察を行う予約患者の人数 ( $d \in D, N_1 + N_2 + N_3 = N$ )

## 5.1 待ち行列モデル $GI/M/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出

待ち行列モデル  $GI/M/1$  における  $WT_2^l$  の分布関数の導出を行う. このモデルにおいて初診患者はポアソン到着を仮定しており, 医師 1, 医師 2 と医師 3 で初診患者を交互に割り当てると仮定している. そのため, 初診患者の到着法則を以下の 3 通り考察する.

- $3n - 2$  番目に来院する初診患者のみ取り出す
- $3n - 1$  番目に来院する初診患者のみ取り出す
- $3n$  番目に来院する初診患者のみ取り出す

1 つ目の到着法則から見る.

- $3n - 2$  番目に来院する初診患者のみ取り出す

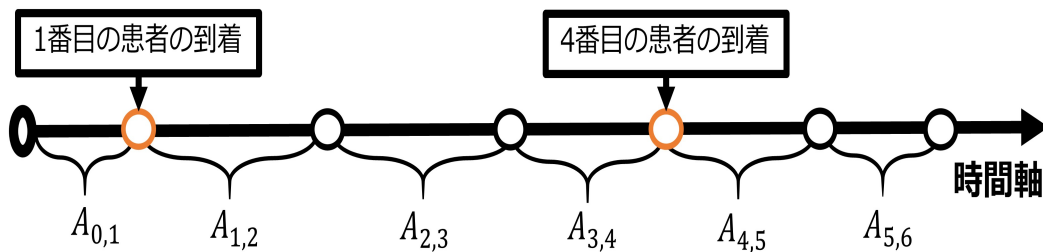


図 5.1:  $3n - 2$  番目に来院する初診患者の到着時間間隔

図 5.1 より, 初診患者の到着時間間隔は 1 番目の患者が到着するまでの時間  $A_{0,1}$  は指数分布に従い, 2 番目以降の患者が到着するまでの時間  $A_{3i-2,3i-1} + A_{3i-1,3i} + A_{3i,3i+1}$  ( $i \geq 1$ ) は平均  $3/\lambda_2$  の次数 3 のアーラン分布に従うことが分かる. したがって,  $3n - 2$  番目に来院する初診患者のみ取り出した場合,

1番目の初診患者の到着までが指数分布, 以降の到着時間間隔は平均  $3/\lambda_2$ , 次数3のアーラン分布にしたがう遅延再生過程に基づき来院することが分かる.

- $3n - 1$  番目に来院する初診患者のみ取り出す

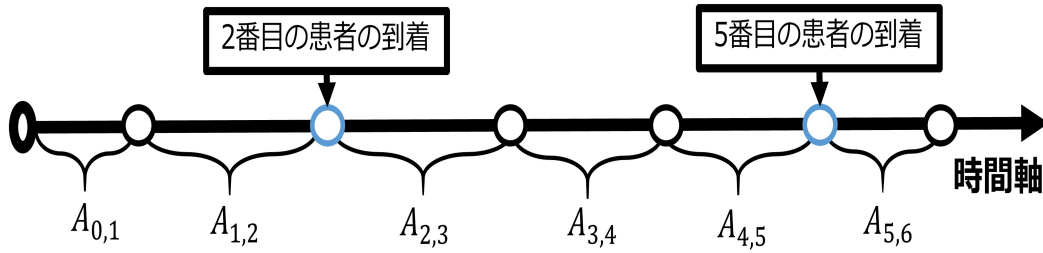


図 5.2:  $3n - 1$  番目に来院する初診患者の到着時間間隔

図 5.2 より, 初診患者の到着時間間隔は 1 番目の患者が到着するまでの時間  $A_{0,1} + A_{1,2}$  は平均  $2/\lambda_2$  の次数 2 のアーラン分布にしたがい, 2 番目以降の患者が到着するまでの時間  $A_{3i-1,3i} + A_{3i,3i+1} + A_{3i+1,3i+2}$  ( $i \geq 1$ ) は平均  $3/\lambda_2$  の次数 3 のアーラン分布に従うことが分かる. したがって,  $3n - 1$  番目に来院する初診患者のみ取り出した場合は 1 番目の平均  $2/\lambda_2$  の次数 2 のアーラン分布, 以降の到着時間間隔は平均  $3/\lambda_2$ , 次数 3 のアーラン分布にしたがう遅延再生過程に基づき来院することが分かる.

- $3n$  番目に来院する初診患者のみ取り出す

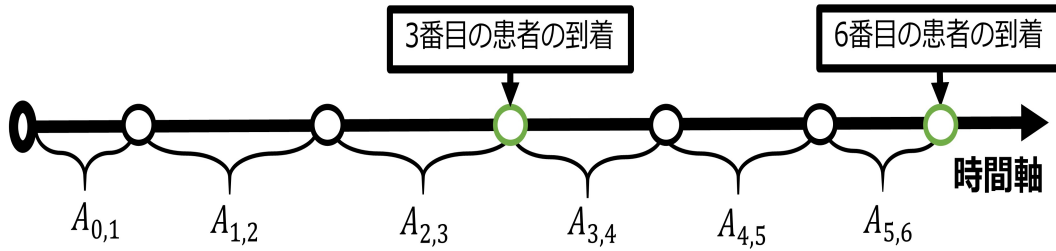


図 5.3:  $3n$  番目に来院する初診患者の到着時間間隔

図 5.2 より, 初診患者の到着時間間隔は  $A_{3i-3,3i-2} + A_{3i-2,3i-1} + A_{3i-1,3i}$  となり, 平均  $3/\lambda_2$  の次数 3 のアーラン分布に従うことが分かる. したがって,  $3n$  番目に来院する初診患者のみ取り出した場合は到着時間間隔が平均  $3/\lambda_2$ , 次数 3 のアーラン分布にしたがう再生過程に基づき来院することが分かる.

$S_{n,d}$  ( $d = 1, 2, 3$ ) を  $A_{i,i+1}$  を用いて表す.

$$S_{n,1} = A_{0,1} + A_{1,2} + \cdots + A_{3n-3,3n-2} \quad (5.1.1)$$

$$S_{n,2} = A_{0,1} + A_{1,2} + \cdots + A_{3n-2,3n-1} \quad (5.1.2)$$

$$S_{n,3} = A_{0,1} + A_{1,2} + \cdots + A_{3n-1,3n} \quad (5.1.3)$$

確率変数  $S_{n,1}$  は (5.1.1) 式より同じパラメータの指数分布に従う確率変数を  $3n - 2$  個足した確率変数

となるため、次数  $3n - 2$  のアーラン分布にしたがう。さらに (4.3.15) 式より

$$\begin{aligned}
 P(N_{2,1}(t) = n) &= P(S_{n,1} \leq t) - P(S_{n+1,1} \leq t) \\
 &= 1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^{3n-3} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} - (1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^{3n} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!}) \\
 &= \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=3n-2}^{3n} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!}
 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

となる。ここで  $P(N_{2,1}(t) = 0) = \exp(-\lambda_2 t)$  である。 $d = 2, 3$  の場合も同様に

$$P(N_{2,2}(t) = n) = \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=3n-1}^{3n+1} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \tag{5.1.5}$$

$$P(N_{2,2}(t) = 0) = (1 + \lambda_2 t) \exp(-\lambda_2 t)$$

$$P(N_{2,3}(t) = n) = \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=3n}^{3n+2} \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \tag{5.1.6}$$

となる。

$WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(\sum_{k=1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{5.1.7}$$

$d = 1, 2, 3$  でそれぞれ次のようになる。

- $d = 1$

$$F_{\sum_{k=1}^{N_{2,1}(t_2)} S_{2,k}}(t) = \exp(-\lambda_2 t_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2 t, j)}{(j-1)!} \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{i=3j-2}^{3j} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} \tag{5.1.8}$$

- $d = 2$

$$F_{\sum_{k=1}^{N_{2,2}(t_2)} S_{2,k}}(t) = (1 + \lambda_2 t_2) \exp(-\lambda_2 t_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2 t, j)}{(j-1)!} \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{i=3j-1}^{3j+1} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} \tag{5.1.9}$$

- $d = 3$

$$F_{\sum_{k=1}^{N_{2,3}(t_2)} S_{2,k}}(t) = \sum_{i=0}^2 \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} \exp(-\lambda_2 t_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2 t, j)}{(j-1)!} \exp(-\lambda_2 t_2) \sum_{i=3j}^{3j+2} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} \tag{5.1.10}$$

## 5.2 待ち行列モデル $GI + D^{N_d}/M/1$ における予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の分布関数の導出

前章で導出した (4.4.17) 式と (4.4.19) 式に  $P(N_{2,d}(t) = n)$  ( $d = 1, 2, 3$ ) を代入することにより  $3n - 2$  番目に来院する初診患者の診察のみ診察を行う待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/M/1$  と  $3n - 1$  番目

に来院する初診患者の診察のみ診察を行う待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/M/1$ ,  $3n$  番目に来院する初診患者の診察のみ診察を行う待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/M/1$  における  $WT_i^l$  ( $i \in I$ ) の分布関数を導出することができる.  $GI + D^{N_d}/M/1$  モデルを3つ並列させた時の待ち行列モデルは図5.4のようになる.

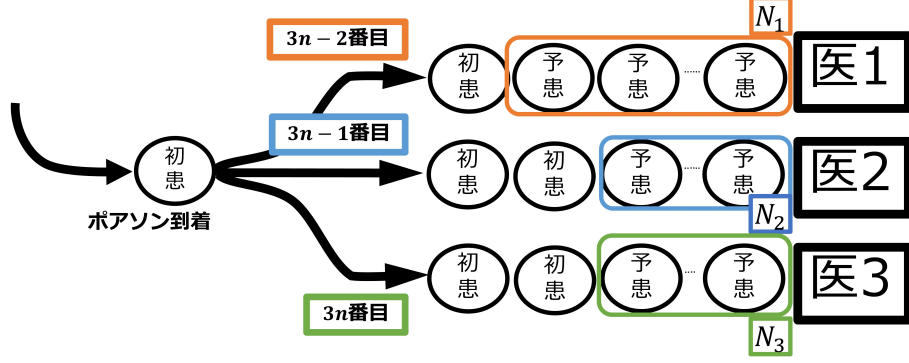


図 5.4: 待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/M/1$  を3つ並列させる場合

$WT_1^l$  の分布関数は次の形となる.

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t + (l-1)T) \quad (5.2.1)$$

$d = 1, 2, 3$  で  $E_l$  の分布関数と関数  $g_l(t)$  はそれぞれ次のようになる.

- $d = 1$

$$F_{E_l}(t) = \frac{\mu_1^{lN_1}}{(lN_1 - 1)!} e^{-\lambda_2 lT} \left[ \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_1)}{\mu_1^{lN_1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_1-1} \binom{lN_1-1}{s} \right. \\ \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_1 + j - 1)}{\mu_2^{lN_1+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \left( \frac{(-1)^w (s+j-1)P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_1 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_1+j-1-w}} \right) \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)! \gamma(\mu_1 t, lN_1 + s)}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j} \mu_1^{lN_1+s}} \right\} \sum_{i=3j-2}^{3j} \frac{(\lambda_2 lT)^i}{i!} \right] \quad (5.2.2)$$

$$g_l(t) = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{(l-1)N_1}}{n!((l-1)N_1 - 1)!} \\ \times [\mu_1^n e^{-\lambda_2(l-1)T - \mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{(t^{s+(l-1)N_1} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_1})}{s + (l-1)N_1} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=3k-2}^{3k} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i \mu_2^k}{i!(k-1)!} e^{-\lambda_2(l-1)T} \sum_{p=0}^{(l-1)N_1-1} \binom{(l-1)N_1-1}{p} \\ \times (-1)^{(l-1)N_1-1-p} \left\{ \frac{s(t; (l-1)N_1 + k - 2)}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_1 t} + \right. \\ \left. \sum_{w=1}^{(l-1)N_1+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w ((l-1)N_1+k-p-2)P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} s(t; (l-1)N_1 + k - w - 2) e^{-\mu_1 t} \right) \right\}]$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N_1+k-p-1}} \\
& \times (-1)^{(l-1)N_1+k-p-1} ((l-1)N_1+k-p-2)! \} \quad (5.2.3)
\end{aligned}$$

•  $d = 2$

$$\begin{aligned}
F_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_2}}{(lN_2-1)!} e^{-\lambda_2 lT} \left[ (1 + \lambda_2 lT) \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_2)}{\mu_1^{lN_2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_2-1} \binom{lN_2-1}{s} \right. \\
& \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_2+j-1)}{\mu_2^{lN_2+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \frac{(-1)^w (s+j-1 P_w)}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_2+j-1-w)}{\mu_2^{lN_2+j-1-w}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_2+s)}{\mu_1^{lN_2+s}} \right\} \sum_{i=3j-1}^{3j+1} \frac{(\lambda_2 lT)^i}{i!} \right] \quad (5.2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{(l-1)N_2}}{n!((l-1)N_2-1)!} \\
& \times [(1 + \lambda_2(l-1)T) \mu_1^n e^{-\lambda_2(l-1)T - \mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \\
& \times \frac{(t^{s+(l-1)N_2} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_2})}{s + (l-1)N_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda_2(l-1)T) \sum_{i=3k-1}^{3k+1} \frac{\mu_2^k (\lambda_2(l-1)T)^i}{i!(k-1)!} \\
& \times \sum_{p=0}^{(l-1)N_2-1} \binom{(l-1)N_2-1}{p} (-1)^{(l-1)N_2-1-p} \left\{ \frac{s(t; (l-1)N_2+k-2) e^{-\mu_1 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \right. \\
& \left. \sum_{w=1}^{(l-1)N_2+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w ((l-1)N_2+k-p-2 P_w) e^{-\mu_1 t}}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} s(t; (l-1)N_2+k-w-2) \right) \right. \\
& \left. + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) e^{-\mu_1 t}}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N_2+k-p-1}} \right. \\
& \left. \times (-1)^{(l-1)N_2+k-p-1} ((l-1)N_2+k-p-2)! \right\} \quad (5.2.5)
\end{aligned}$$

•  $d = 3$

$$\begin{aligned}
F_{E_l}(t) &= \frac{\mu_1^{lN_3} e^{-\lambda_2 lT}}{(lN_3-1)!} \left[ (1 + \lambda_2 lT + \frac{(\lambda_2 lT)^2}{2}) \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_3)}{\mu_1^{lN_3}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_2^j}{(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_3-1} \binom{lN_3-1}{s} \right. \\
& \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_3+j-1)}{\mu_2^{lN_3+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} + \sum_{w=1}^{s+j-1} \frac{(-1)^w (s+j-1 P_w)}{(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \frac{\gamma(\mu_2 t, lN_3+j-1-w)}{\mu_2^{lN_3+j-1-w}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{(-1)^{s+j} (s+j-1)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \frac{\gamma(\mu_1 t, lN_3+s)}{\mu_1^{lN_3+s}} \right\} \sum_{i=3j}^{3j+2} \frac{(\lambda_2 lT)^i}{i!} \right] \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

$$g_l(t) = \frac{1}{N_3} \sum_{j=1}^{N_3-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{\mu_1^{(l-1)N_3}}{n!((l-1)N_3-1)!}$$

$$\begin{aligned}
& [(1 + \lambda_2(l-1)T + \frac{(\lambda_2(l-1)T)^2}{2})\mu_1^n e^{-\lambda_2(l-1)T - \mu_1 t} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \\
& \times \frac{(t^{s+(l-1)N_3} - ((l-1)T)^{s+(l-1)N_3})}{s + (l-1)N_3} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=3k}^{3k+2} \frac{\mu_2^k (\lambda_2(l-1)T)^i}{i!(k-1)!} e^{-\lambda_2(l-1)T} \\
& \times \sum_{p=0}^{(l-1)N_3-1} \binom{(l-1)N_3-1}{p} (-1)^{(l-1)N_3-1-p} \{e^{-\mu_1 t} \frac{s(t; (l-1)N_3 + k - 2)}{\mu_1 - \mu_2} + \\
& \sum_{w=1}^{(l-1)N_3+k-p-2} (\frac{(-1)^w ((l-1)N_3+k-p-2)P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} s(t; (l-1)N_3 + k - w - 2)) \\
& + \frac{\mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s (t^{s+p+1} - ((l-1)T)^{s+p+1}) \exp(-\mu_1 t)}{(s+p+1)(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N_3+k-p-1}} \\
& \times (-1)^{(l-1)N_3+k-p-1} ((l-1)N_3 + k - p - 2)! \} ] \quad (5.2.7)
\end{aligned}$$

$WT_2^l$  の分布関数は次の形となる.

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=N_{2,d}((l-1)T)+1}^{N_{2,d}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (5.2.8)$$

$d = 1, 2, 3$  の時それぞれ次の形となる.

- $d = 1$

$$\begin{aligned}
& P(E'_l + \sum_{k=N_{2,1}((l-1)T)+1}^{N_{2,1}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) = \frac{\gamma(\mu_1(t+t_2), lN_1) e^{-\lambda_2 t_2}}{(lN_1 - 1)!} \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{lN_1} \mu_2^j}{(lN_1 - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_1-1} \binom{lN_1-1}{s} (-1)^s \{ \frac{\gamma(\mu_2(t+t_2), lN_1 + j - 1)}{\mu_2^{lN_1+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} \\
& + \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w \frac{\gamma(\mu_2(t+t_2), lN_1 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_1+j-1-w}(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \\
& - \frac{\gamma(\mu_1(t+t_2), lN_1 + s) (-1)^{s+j} (s+j-1)!}{\mu_1^{lN_1+s}(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \} \sum_{i=3j-2}^{3j} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t_2} \quad (5.2.9)
\end{aligned}$$

- $d = 2$

$$\begin{aligned}
& P(E'_l + \sum_{k=N_{2,2}((l-1)T)+1}^{N_{2,2}(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) = (1 + \lambda_2 t_2) e^{-\lambda_2 t_2} \frac{\gamma(\mu_1(t+t_2), lN_2)}{(lN_2 - 1)!} \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{lN_2} \mu_2^j}{(lN_2 - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_2-1} \binom{lN_2-1}{s} (-1)^s \{ \frac{\gamma(\mu_2(t+t_2), lN_2 + j - 1)}{\mu_2^{lN_2+j-1}(\mu_1 - \mu_2)} \\
& + \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w \frac{\gamma(\mu_2(t+t_2), lN_2 + j - 1 - w)}{\mu_2^{lN_2+j-1-w}(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}}
\end{aligned}$$

$$- \frac{\gamma(\mu_1(t+t_2), lN_2+s)(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{\mu_1^{lN_2+s}(\mu_1-\mu_2)^{s+j}} \} \sum_{i=3j-1}^{3j+1} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t_2} \quad (5.2.10)$$

•  $d = 3$

$$\begin{aligned} & P(E'_l + \sum_{k=N_{2,3}((l-1)T)+1}^{N_{2,3}(t_2)} S_{2,k} \leq t+t_2) \\ &= (1 + \lambda_2 t_2 + \frac{(\lambda_2 t_2)^2}{2}) e^{-\lambda_2 t_2} \frac{\gamma(\mu_1(t+t_2), lN_3)}{(lN_3-1)!} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{lN_3} \mu_2^j}{(lN_3-1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{lN_3-1} \binom{lN_3-1}{s} (-1)^s \{ \frac{\gamma(\mu_2(t+t_2), lN_3+j-1)}{\mu_2^{lN_3+j-1}(\mu_1-\mu_2)} \\ &+ \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w ({}_{s+j-1}P_w) \frac{\gamma(\mu_2(t+t_2), lN_3+j-1-w)}{\mu_2^{lN_3+j-1-w}(\mu_1-\mu_2)^{1+w}} \\ &- \frac{\gamma(\mu_1(t+t_2), lN_3+s)(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{\mu_1^{lN_3+s}(\mu_1-\mu_2)^{s+j}} \} \sum_{i=3j-1}^{3j+1} \frac{(\lambda_2 t_2)^i}{i!} e^{-\lambda_2 t_2} \quad (5.2.11) \end{aligned}$$

## 第 6 章

# $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ の場合

本章では前章までの診察待ち時間モデルを拡張する．サービス時間をアーラン分布に従うと仮定し，枠毎に初診患者の到着率と 予約患者の予約人数が変更可能であるモデルに拡張する．

### 6.1 記号の定義とモデルの説明

本章で扱う診察待ち時間のモデルを説明するにあたり，以下に記号の定義を行う．予約可能な予約枠の添え字集合を  $L$ ，1 枠の時間を  $T$  として定義し，予約枠  $l$  (略称  $l$  枠) ( $l \in L$ ) を時間区間  $[(l-1)T, lT)$  として定義する．患者種類の添字集合を  $I$  とし， $i=1$  を予約患者 (事前に予約を取り来院する患者)， $i=2$  を初診患者 (予約を取らずに初めて来院する患者) として定義する．種類  $i$  ( $i \in I$ ) の患者の診察時間はパラメータは平均  $1/\mu_i$ ，次数  $\alpha_i$  のアーラン分布に従うと仮定する．すなわち種類  $i$  の患者一人当たりの診察時間の長さは  $F_{S_{i,k}^l}(t) = 1 - e^{-\alpha_i \mu_i t} \sum_{i=1}^{\alpha_i} (\alpha_i \mu_i t)^{i-1} / (i-1)!$  に従い，患者種類でサービス時間が異なる．次に各患者の到着法則と診察順序を示す．

**予約患者：**

予約患者が  $l$  ( $l \in L$ ) 枠に来院する人数を  $N^l$  人として置き，遅くともその枠の開始時刻  $(l-1)T$  には来院している．また，前の枠に来院した患者の診察が全て終了する時刻には診察を受けられるように，十分早めに来院していると仮定する．さらに前の枠の全ての初診患者が診察終了した後 (1 枠においては時刻 0) に，前から順に診察を受ける．

**初診患者：**

$l$  枠に来院する初診患者はパラメータ  $\lambda_2^l$  のポアソン到着に従い来院し，待ち行列の最後尾に並ぶ．ここで到着率は枠毎に設定することが可能であるとする．初診患者の診察は連続で行われ，診察の間の空き時間が無いと仮定する．来院した時間枠の全ての予約患者が診察終了した後，前から順に診察を受ける．

加えて以下の記号を定義する．

定数

$t_2$  : 初診患者の到着時刻

記号

$C_i^{l*}$  : 予約枠  $l$  に到着する, 種類  $i$  の特定の患者 ( $i \in I, l \in L$ )

確率変数

$S_1^l$  : 予約枠  $l$  に到着する  $C_1^{l*}$  より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間 ( $l \in L$ )

$S_{i,k}^l$  :  $l$  枠に  $k$  番目に到着する種類  $i$  の患者 1 人当たりのサービス時間 ( $i \in I, l \in L$ )

$TS_i^l$  :  $l$  枠に到着する種類  $i$  の患者の合計サービス時間 ( $i \in I, l \in L$ )

$E_l$  : 予約枠  $l$  に到着した全ての初診患者のサービス終了時刻 ( $l \in L$ ) (但し,  $E_0 := 0$ )

$E'_l$  : 予約枠  $l$  に到着した全ての予約患者のサービス終了時刻 ( $l \in L$ ) (但し,  $E'_0 := 0$ )

$A_{k,k+1}$  :  $k$  番目に来院する初診患者と  $k+1$  番目に来院する初診患者の到着時間間隔

$N_2^l(t)$  : パラメータ  $\lambda_2^l$  のポアソン過程

$WT_i^l$  :  $C_i^{l*}$  の待ち時間 ( $i \in I, l \in L$ )

パラメータ

$(\mu_i, \alpha_i)$  :  $S_{i,k}^l$  ( $l$  枠に来院する種類  $i$  の患者 1 人当たりのサービス時間) が従うアーラン分布のパラメータの組み合わせ (診察率, 次数) ( $i \in I$ )

$\lambda_2^l$  :  $l$  枠に来院する初診患者が従うポアソン到着のパラメータ

当モデルでは各枠で初診患者の到着率と予約患者の予約可能人数を別々に設定することが可能であると仮定している. そのため, 患者 1 人の診察時間の確率変数を  $S_{i,k}^l$  と置き, 各枠で患者の人数を数える. また  $l$  枠に来院する初診患者がパラメータ  $\lambda_2^l$  のポアソン到着することを仮定している. そのために, 到着時間間隔が  $F_{A_{k,k+1}}(t) = 1 - e^{-\lambda_2^l t}$  ( $t \geq 0$ ) の指数分布に従う. また, パラメータ  $\lambda_2^l$  に従うポアソン過程  $N_2^l(t)$  を導入する. 時間区間  $[(l-1)T, t)$  ( $\forall t \in [(l-1)T, lT)$ ) に  $k$  人来院する事象  $\{N_2^l(t - (l-1)T) = k\}$  の確率は  $P(N_2^l(t - (l-1)T) = k) = e^{-\lambda_2^l t} (\lambda_2^l (t - (l-1)T))^k / k!$  となる. また患者一人当たりの診察時間はアーランサービスに従うことを仮定しているため, 種類  $i$  の患者の診察時間は次数が  $\alpha_i$ , 平均値が  $1/\mu_i$  のアーラン分布に従い, すなわち患者一人当たりの診察時間は  $F_{S_{i,k}^l}(t) = 1 - e^{-\alpha_i \mu_i t} \sum_{i=1}^{\alpha_i} (\alpha_i \mu_i t)^{i-1} / (i-1)!$  に従う. 分散値が  $1/(\alpha_i \mu_i^2)$  であり,  $\alpha_i \rightarrow \infty$  とすると分散値が 0 になり, 単位分布に収束する.  $\alpha_i = 1$  の時には指数分布と一致する.

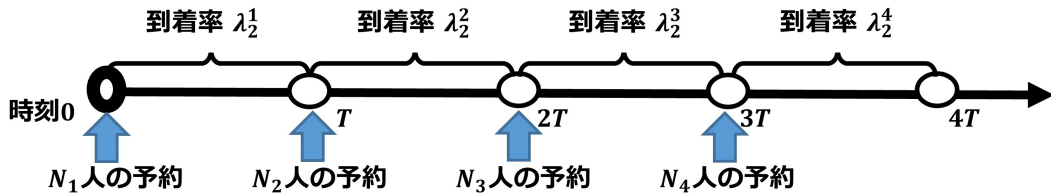


図 6.1: 想定している状況

## 6.2 各患者の診察待ち時間とその分布関数の導出方法

予約患者の待ち時間は 3.2.1 節で計算した (3.2.3) 式となり、初診患者の待ち時間は 3.2.2 節で計算した (3.2.5) 式の  $N_2(t)$  を  $N_2^l(t)$ ,  $S_{2,k}$  を  $S_{2,k}^l$  と置いた次の式となる.

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (6.2.1)$$

$$WT_2^l = \max\{E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l, t_2\} - t_2 \quad (l \in L) \quad (6.2.2)$$

(6.2.1) 式より  $WT_1^l$  の分布関数は

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t + (l-1)T - x)f_{E_{l-1}}(x)dx \quad (6.2.3)$$

となる. (6.2.3) 式の第 2 項の計算を行うために、確率変数  $S_1^l$ ,  $E_{l-1}$ , の分布関数と  $E_{l-1}$  の密度関数を導出する. 6.3 節でこれらの関数の導出を行う. また (6.2.2) 式より  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (6.2.4)$$

となる. そのために確率変数  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を導出する. 6.3 節でこの関数の導出を行う.

## 6.3 確率変数 $E_l$ , $S_1^l$ , $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$ の分布関数の導出

本章では  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $S_1^l$  と  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数の導出を行う.

### 6.3.1 確率変数 $E_l$ の分布関数の導出

はじめに確率変数  $E_l$  の分布関数を導出する. 確率変数  $E_l$  をサービス時間を表す確率変数を用いて表す.

$$\begin{aligned} E_l &= E_{l-1} + \sum_{k=1}^{N_1^l} S_{1,k}^l + \sum_{k=1}^{N_2^l(T)} S_{2,k}^l = E_{l-1} + TS_1^l + TS_2^l \\ &= (E_{l-2} + TS_1^{l-1} + TS_2^{l-1}) + TS_1^l + TS_2^l = \dots \\ &= \sum_{l_1=1}^l (TS_1^{l_1} + TS_2^{l_1}) \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

$E_l$  の分布関数を次の手順で導出する.

$E_l$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

各ステップ毎の計算過程を示す.

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.

$TS_1^{l_1} + TS_2^{l_1}$  は独立であるため

$$E[\exp(E_l s)] = E[\exp(\sum_{l_1=1}^l (TS_1^{l_1} + TS_2^{l_1})s)] = \prod_{l_1=1}^l E[\exp((TS_1^{l_1} + TS_2^{l_1})s)] \quad (6.3.2)$$

となる. ここで  $TS_1^{l_1}, TS_2^{l_1}$  の独立性より

$$E[\exp((TS_1^{l_1} + TS_2^{l_1})s)] = E[\exp(TS_1^{l_1}s)]E[\exp(TS_2^{l_1}s)] \quad (6.3.3)$$

となる.  $S_{1,k}^{l_1}$  の独立性より

$$E[\exp(TS_1^{l_1}s)] = E[\exp(\sum_{k=1}^{N^{l_1}} S_{1,k}^{l_1}s)] = \prod_{k=1}^{N^{l_1}} E[\exp(S_{1,k}^{l_1}s)] \quad (6.3.4)$$

となる. ここで

$$E[\exp(S_{1,k}^{l_1}s)] = \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^\infty t^{\alpha_1-1} e^{(-\alpha_1 \mu_1 + s)t} dt \quad (6.3.5)$$

となり,  $x = (\alpha_1 \mu_1 - s)t$  と置くと (6.3.5) 式は

$$E[\exp(S_{1,k}^{l_1}s)] = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \frac{1}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1}} \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-x} dx \quad (6.3.6)$$

と計算出来る. ここで

$$\int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-x} dx = (\alpha_1 - 1)! \quad (6.3.7)$$

であるため,

$$E[\exp(S_{1,k}^{l_1}s)] = \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1} \quad (6.3.8)$$

となる. (6.3.8) 式を (6.3.4) 式に代入すると

$$E[\exp(TS_1^{l_1}s)] = \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 N^{l_1}} \quad (6.3.9)$$

となる. また, 全確率の公式を用いることにより

$$E[\exp(TS_2^{l_1}s)] = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^j E[\exp(S_{2,k}^{l_1}s)] P(N_2^{l_1}(T) = j) \quad (6.3.10)$$

となる. ここで

$$E[\exp(S_{2,k}^l s)] = \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \quad (6.3.11)$$

$$P(N_2^{l_1}(T) = j) = e^{-\lambda_2^{l_1} T} \frac{(\lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \quad (6.3.12)$$

であるため, それぞれ (6.3.10) 式に代入すると

$$E[\exp(T S_2^{l_1} s)] = \exp\left(\left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} (\lambda_2^{l_1} T) - \lambda_2^{l_1} T\right) \quad (6.3.13)$$

となる. (6.3.9) 式と (6.3.13) 式を (6.3.3) 式に代入すると  $T S_1^{l_1} + T S_2^{l_1}$  の積率母関数は

$$E[\exp((T S_1^{l_1} + T S_2^{l_1}) s)] = \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 N^{l_1}} \exp\left(\left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} (\lambda_2^{l_1} T) - \lambda_2^{l_1} T\right) \quad (6.3.14)$$

となる. 最後に (6.3.14) 式を (6.3.2) 式に代入すると  $E_l$  の積率母関数は

$$E[\exp(E_l s)] = \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) \quad (6.3.15)$$

となる.

2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

$A := \alpha_1 \mu_1$ ,  $B := \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}$ ,  $C := \alpha_2 \mu_2$ ,  $D := \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T$  と置き, 関数の積を逆ラプラス変換した関数は, 逆ラプラス変換した関数の畳み込み積分となるため

$$\begin{aligned} f_{E_l}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{M_{E_l}(-s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{A}{A+s}\right)^B \exp(-D + \left(\frac{C}{C+s}\right)^{\alpha_2} D)\right\} \\ &= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{A}{A+s}\right)^B\right\}(t-u) \mathcal{L}^{-1}\left\{\exp(-D + \left(\frac{C}{C+s}\right)^{\alpha_2} D)\right\}(u) du \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

を得る.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{A}{A+s}\right)^B\right\} = \frac{A^B t^{B-1} \exp(-At)}{(B-1)!} \quad (6.3.17)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\exp(-D + \left(\frac{C}{C+s}\right)^{\alpha_2} D)\right\} = \exp(-D) \left\{ \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-Ct) \frac{D^k C^{k\alpha_2} t^{k\alpha_2-1}}{k!(k\alpha_2-1)!} \right\} \quad (6.3.18)$$

となるため, (6.3.17), (6.3.18) 式を (6.3.16) 式に代入しまとめると

$$\begin{aligned} f_{E_l}(t) &= \frac{A^B t^{B-1} \exp(-At - D)}{(B-1)!} + \frac{A^B \exp(-At - D)}{(B-1)!} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} t^{B-1-j} (-1)^j \int_0^t u^{j+k\alpha_2-1} \exp(A-C) u du \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

となる. ここで



a)  $A \neq C$ 

$$\int_0^t u^{j+k\alpha_2-1} e^{(A-C)u} du = \frac{t^{j+k\alpha_2-1} e^{(A-C)t}}{A-C} + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{t^{j+k\alpha_2-1-w} e^{(A-C)t}}{(A-C)^{1+w}} + \frac{(-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \quad (6.3.20)$$

b)  $A = C$ 

$$\int_0^t u^{j+k\alpha_2-1} du = \frac{1}{j+k\alpha_2} t^{j+k\alpha_2} \quad (6.3.21)$$

となる. ここで (6.3.20) 式は  $\alpha_1\mu_1 \rightarrow \alpha_2\mu_2$  とすると (6.3.21) 式に収束する. 各場合に計算する.

a)  $A \neq C$ 

(6.3.20) 式を (6.3.19) 式に代入し  $t^{B-1-j}$  を括弧内に入れ計算を行う.

$$\begin{aligned} f_{E_l}(t) &= \frac{A^B t^{B-1} \exp(-At - D)}{(B-1)!} + \frac{A^B \exp(-At - D)}{(B-1)!} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} t^{B-1-j} (-1)^j \left\{ \frac{t^{j+k\alpha_2-1} e^{(A-C)t}}{A-C} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{t^{j+k\alpha_2-1-w} e^{(A-C)t}}{(A-C)^{1+w}} \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \right\} \\ &= \frac{A^B t^{B-1} \exp(-At - D)}{(B-1)!} + \frac{A^B \exp(-At - D)}{(B-1)!} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} (-1)^j \left\{ \frac{t^{B+k\alpha_2-2} e^{(A-C)t}}{A-C} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{t^{B+k\alpha_2-2-w} e^{(A-C)t}}{(A-C)^{1+w}} \\ &\quad \left. + \frac{t^{B-1-j} (-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \right\} \\ &= \frac{A^B t^{B-1} \exp(-At - D)}{(B-1)!} + \frac{A^B \exp(-D)}{(B-1)!} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} (-1)^j \left\{ \frac{t^{B+k\alpha_2-2} e^{-Ct}}{A-C} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{t^{B+k\alpha_2-2-w} e^{-Ct}}{(A-C)^{1+w}} \\ &\quad \left. + \frac{t^{B-1-j} e^{-At} (-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \right\} \quad (6.3.22) \end{aligned}$$

$A, B, C, D$  を元に戻すと  $E_l$  の密度関数は

$$\begin{aligned}
 f_{E_l}(t) = & \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}-1} \exp(-\alpha_1 \mu_1 t - \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
 & + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_2 \mu_2)^{k \alpha_2}}{k! (k \alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}-1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
 & \times (-1)^j \left\{ \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k \alpha_2 - 2} e^{-\alpha_2 \mu_2 t}}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\
 & + \sum_{w=1}^{j+k \alpha_2 - 1} (-1)^w (j+k \alpha_2 - 1 P_w) \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k \alpha_2 - 2 - w} e^{-\alpha_2 \mu_2 t}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
 & \left. + \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1 - j} e^{-\alpha_1 \mu_1 t} (-1)^{j+k \alpha_2 - 1 + 1} (j+k \alpha_2 - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k \alpha_2}} \right\} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (6.3.23)
 \end{aligned}$$

となる。

3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出。

$$\begin{aligned}
 F_{E_l}(t) = & \frac{\int_0^t x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}-1} e^{-\alpha_1 \mu_1 x} dx (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
 & + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_2 \mu_2)^{k \alpha_2}}{k! (k \alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}-1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
 & \times (-1)^j \left\{ \frac{\int_0^t x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k \alpha_2 - 2} e^{-\alpha_2 \mu_2 x} dx}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\
 & + \sum_{w=1}^{j+k \alpha_2 - 1} (-1)^w (j+k \alpha_2 - 1 P_w) \frac{\int_0^t x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k \alpha_2 - 2 - w} e^{-\alpha_2 \mu_2 x} dx}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
 & \left. + \frac{\int_0^t x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1 - j} e^{-\alpha_1 \mu_1 x} dx (-1)^{j+k \alpha_2 - 1 + 1} (j+k \alpha_2 - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k \alpha_2}} \right\} \quad (6.3.24)
 \end{aligned}$$

ここで (6.3.24) 式を  $\gamma(ut, n+1)$  を用いてまとめると

$$\begin{aligned}
 F_{E_l}(t) = & \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T) \\
 & + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_2 \mu_2)^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times (-1)^j \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1}} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w (j+k\alpha_2-1) P_w \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - w - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1 - w}} \\
& + \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - j)}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - j} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k\alpha_2}} \\
& \left. \times (-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)! \right\} \quad (0 \leq t < \infty)
\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

となる.

b)  $A = C$

(6.3.19) 式に (6.3.21) 式を代入しまとめる.

$$\begin{aligned}
f_{E_l}(t) &= \frac{A^B t^{B-1} \exp(-At - D)}{(B-1)!} + \frac{A^B \exp(-At - D)}{(B-1)!} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k A^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} \frac{t^{B-1+k\alpha_2} (-1)^j}{j+k\alpha_2}
\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

$A, B, D$  を元に戻す.

$$\begin{aligned}
f_{E_l}(t) &= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \exp(-\alpha_1 \mu_1 t - \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\alpha_1 \mu_1 t - \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_1 \mu_1)^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1 + k\alpha_2} (-1)^j}{j+k\alpha_2} \quad (0 \leq t < \infty)
\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

$$\begin{aligned}
F_{E_l}(t) &= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \int_0^t x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \exp(-\alpha_1 \mu_1 x) dx \\
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_1 \mu_1)^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1-1}} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} (-1)^j \\
& \times \frac{\int_0^t x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1-1} + k\alpha_2} \exp(-\alpha_1 \mu_1 x) dx}{j + k\alpha_2} \} \\
& = \frac{\exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}) + \frac{\exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1-1}} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times \frac{(-1)^j \gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2)}{(j + k\alpha_2)} \quad (0 \leq t < \infty)
\end{aligned} \tag{6.3.28}$$

### 6.3.2 確率変数 $S_1^l$ の分布関数の導出

次に  $S_1^l$  の分布関数を求める.

$$\begin{aligned}
F_{S_1^l}(t) &= P(S_1^l \leq t) \\
&= \sum_{j=0}^{N^l-1} P\left(\sum_{k=1}^j S_{1,k}^l \leq t\right) P(\{C_1^{l*} \text{が } j+1 \text{ 番目に診察を受ける}\}) \\
&= \frac{1}{N^l} + \sum_{j=1}^{N^l-1} P\left(\sum_{k=1}^j S_{1,k}^l \leq t\right) \frac{1}{N^l}
\end{aligned} \tag{6.3.29}$$

$S_{1,k}^l$  はパラメータ  $(\alpha_1, \alpha_1 \mu_1)$  のアーラン分布に従い、アーラン分布の再生性より  $\sum_{k=1}^j S_{1,k}^l$  はパラメータ  $(j\alpha_1, \alpha_1 \mu_1)$  のアーラン分布に従う. したがってが

$$F_{\sum_{k=1}^j S_{1,k}^l}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 \mu_1 t} \sum_{n=0}^{j\alpha_1-1} \frac{(\alpha_1 \mu_1 t)^n}{n!} \quad (0 \leq t < \infty) \tag{6.3.30}$$

となる. (6.3.30) 式を (6.3.29) 式に代入しとめると

$$F_{S_1^l}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 \mu_1 t} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1 t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{1}{N^l} \quad (0 \leq t < \infty) \tag{6.3.31}$$

となる.

### 6.3.3 $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$ の分布関数の導出

確率変数  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  をサービス時間を表す確率変数を用いて表す.

$$E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$$

$$\begin{aligned}
&= E_{l-1} + \sum_{k=1}^{N^l} S_{1,k}^l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \\
&= \sum_{l_1=1}^l \sum_{k=1}^{N^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_2^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l
\end{aligned} \tag{6.3.32}$$

$E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数を計算する.

$$\begin{aligned}
&E[\exp(E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l)s] \\
&= E[\exp(\sum_{l_1=1}^l \sum_{k=1}^{N^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_2^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l)s] \\
&= \prod_{l_1=1}^l \prod_{k=1}^{N^{l_1}} E[\exp(S_{1,k}^{l_1}s)] \prod_{l_1=1}^{l-1} E[\exp(\sum_{k=1}^{N_2^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}s)] E[\exp(\sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l s)]
\end{aligned} \tag{6.3.33}$$

$S_{1,k}^{l_1}$  はアーラン分布に従うため次のようになる.

$$\begin{aligned}
&E[\exp(E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l)s] \\
&= \prod_{l_1=1}^l \prod_{k=1}^{N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1} \prod_{l_1=1}^{l-1} \exp\left( \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2} (\lambda_2^{l_1} T) - \lambda_2^{l_1} T \right) \\
&\quad \times \exp\left( \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2} (\lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)) - \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T) \right) \\
&= \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{(\sum_{l_1=1}^l N^{l_1})\alpha_1} \exp\left( \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2} \left( \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T \right) - \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T \right) \\
&\quad \times \exp\left( \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2} (\lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)) - \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T) \right) \\
&= \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{(\sum_{l_1=1}^l N^{l_1})\alpha_1} \times \\
&\quad \exp\left( \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2} \left( \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T) \right) - \left( \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T) \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.3.34}$$

(6.3.34) 式は (6.3.15) 式の  $\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T$  を  $\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)$  と置いた式と等しいため,  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
F_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) &= \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}) \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)))}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}} \\
&\quad + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)))}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T))^k (\alpha_2 \mu_2)^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times (-1)^j \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1}} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w (j+k\alpha_2-1) P_w \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - w - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1 - w}} \\
& \left. + \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - j)(-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - j} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k\alpha_2}} \right\} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (6.3.35)
\end{aligned}$$

## 6.4 予約患者と初診患者の待ち時間の分布関数の導出

前章で求めた  $S_1^l$  の分布関数と  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を用いることにより, 予約患者と初診患者の待ち時間の分布関数を導出する.

### 6.4.1 予約患者の待ち時間の分布関数の導出

最初に  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $S_1^l$  の分布関数を用いて  $\max\{E_{l-1} + S_1^l, (l-1)T + S_1^l\}$  の分布関数を導出する. そのために (6.2.3) 式の第2項の計算を行う.  $F_{S_1^l}(t-x) = 0$  ( $x \geq t$ ) となるため,

$$\begin{aligned}
& \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx \\
& = \int_{(l-1)T}^t \left\{ 1 - e^{-\alpha_1 \mu_1 (t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1 (t-x))^{i-1}}{(i-1)!} \right\} \frac{1}{N^l} f_{E_{l-1}}(x) dx \\
& = \int_{(l-1)T}^t f_{E_{l-1}}(x) dx - \int_{(l-1)T}^t e^{-\alpha_1 \mu_1 (t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1 (t-x))^{i-1}}{(i-1)!} \frac{1}{N^l} f_{E_{l-1}}(x) dx \\
& = F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}(x) - \frac{1}{N^l} \int_{(l-1)T}^t e^{-\alpha_1 \mu_1 (t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1 (t-x))^{i-1}}{(i-1)!} f_{E_{l-1}}(x) dx \quad (6.4.1)
\end{aligned}$$

ここで  $g_l(t) = (1/N^l) \int_{(l-1)T}^t e^{-\alpha_1 \mu_1 (t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} ((\alpha_1 \mu_1 (t-x))^{i-1} / (i-1)!) f_{E_{l-1}}(x) dx$  と置き,  $g_l(t)$  の計算を行う. また,  $A := \alpha_1 \mu_1$ ,  $B := \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1}$ ,  $C := \alpha_2 \mu_2$ ,  $D := \sum_{l_1=1}^{(l-1)} \lambda_2^{l_1} T$  とし, 計算する.

a)  $A \neq C$

$$g_l(t) = \frac{1}{N^l} \int_{(l-1)T}^t e^{-A(t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(A(t-x))^{i-1}}{(i-1)!} f_{E_{l-1}}(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^l} \int_{(l-1)T}^t e^{-A(t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(A(t-x))^{i-1}}{(i-1)!} \left[ \frac{A^B x^{B-1}}{(B-1)!} \exp(-Ax - D) \right. \\
&+ \frac{A^B \exp(-D)}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} (-1)^j \left\{ \frac{x^{B+k\alpha_2-2} e^{(-Cx)}}{A-C} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{x^{B+k\alpha_2-2-w} e^{(-Cx)}}{(A-C)^{1+w}} \\
&\left. \left. + \frac{x^{B-1-j} \exp(-Ax) (-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \right\} \right] dx \quad (6.4.2)
\end{aligned}$$

$(A(t-x))^{i-1} e^{-A(t-x)}$  を括弧内に入れる.

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \frac{1}{N^l} \int_{(l-1)T}^t \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{(i-1)!} \left[ A^B e^{-At-D} \frac{(A(t-x))^{i-1} x^{B-1}}{(B-1)!} \right. \\
&+ \frac{A^B e^{-D}}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} (-1)^j \\
&\quad \times \left\{ \frac{(A(t-x))^{i-1} x^{B+k\alpha_2-2} e^{-A(t-x)-Cx}}{A-C} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{(A(t-x))^{i-1} x^{B+k\alpha_2-2-w} e^{-A(t-x)-Cx}}{(A-C)^{1+w}} \\
&\quad \left. \left. + \frac{(A(t-x))^{i-1} x^{B-1-j} \exp(-A(t-x)-Ax) (-1)^{j+k\alpha_2} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \right\} \right] dx \\
&= \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{(i-1)!} \left[ A^B e^{-At-D} \frac{\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B-1} dx}{(B-1)!} \right. \\
&+ \frac{A^B e^{-D}}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} (-1)^j \\
&\quad \times \left\{ \frac{\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B+k\alpha_2-2} e^{-A(t-x)-Cx} dx}{A-C} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B+k\alpha_2-2-w} e^{-A(t-x)-Cx} dx}{(A-C)^{1+w}} \\
&\quad \left. \left. + \frac{e^{-At} (-1)^{j+k\alpha_2} (j+k\alpha_2-1)!}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B-1-j} dx \right\} \right] \quad (6.4.3)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^n dx \\
&= A^{i-1} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{1}{u+n+1} (t^{u+n+1} - ((l-1)T)^{u+n+1}) \quad (6.4.4)
\end{aligned}$$

であるため, (6.4.4) 式の  $n$  に  $B-1-j$ ,  $B-1$  をそれぞれ代入した式を (6.4.3) 式に代入する.

$$\begin{aligned}
g_l(t) = & \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{(i-1)!} \left[ \frac{A^{B+i-1} \exp(-At-D)}{(B-1)!} \right. \\
& \times \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{(t^{u+B} - ((l-1)T)^{u+B})}{u+B} \\
& + \frac{A^B e^{-D}}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k C^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} (-1)^j \\
& \times \left\{ \frac{\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B+k\alpha_2-2} e^{-A(t-x)-Cx} dx}{A-C} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B+k\alpha_2-2-w} e^{-A(t-x)-Cx} dx}{(A-C)^{1+w}} \\
& + \frac{A^{i-1} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u}}{(A-C)^{j+k\alpha_2}} \\
& \left. \left. \frac{(t^{u+B-j} - ((l-1)T)^{u+B-j}) (-1)^{u+j+k\alpha_2} (j+k\alpha_2-1)! e^{-At}}{u+B-j} \right\} \right] \quad (6.4.5)
\end{aligned}$$

$s(t; n) := \int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^n e^{-A(t-x)-Cx} dx$  と置き,  $g_l(t)$  を  $s(t; B+k\alpha_2-2)$ ,  $s(t; B+k\alpha_2-2-w)$  を用いて表記する.  $s(t; n)$  の計算は付録 A.3 で行う. 最後に  $A, B, C, D$  を元に戻し,  $g_l(t)$  を  $s(t; n)$  を用いて表記する.

$$\begin{aligned}
g_l(t) = & \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{(i-1)!} \left[ \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + i-1} \exp(-\alpha_1 \mu_1 t - \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \right. \\
& \times \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{\{t^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}\}}{u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} \\
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_2 \mu_2)^{k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \\
& \times \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times (-1)^j \left\{ \frac{s(t; \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k\alpha_2 - 2)}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w ({}_{j+k\alpha_2-1}P_w) \frac{s(t; \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k\alpha_2 - 2 - w)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
& \left. + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{i-1} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^{u+j+k\alpha_2} (j+k\alpha_2-1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k\alpha_2}} \right]
\end{aligned}$$



$$\times \frac{(t^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}-j} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}-j}) \exp(-\alpha_1 \mu_1 t)}{u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - j} \} \} \quad (6.4.6)$$

b)  $A = C$ 

$$\begin{aligned} g_l(t) &= \frac{1}{N^l} \int_{(l-1)T}^t e^{-A(t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(A(t-x))^{i-1}}{(i-1)!} f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &= \frac{1}{N^l} \int_{(l-1)T}^t e^{-A(t-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{(A(t-x))^{i-1}}{(i-1)!} \left\{ \frac{A^B x^{B-1}}{(B-1)!} \exp(-Ax - D) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^B \exp(-Ax - D)}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k A^{k\alpha_2} x^{B-1+k\alpha_2}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} \frac{(-1)^j}{j+k\alpha_2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{e^{-At}}{(i-1)!} \left\{ A^B e^{-D} \frac{\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B-1} dx}{(B-1)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^B e^{-D}}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k A^{k\alpha_2} \int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B-1+k\alpha_2} dx}{k!(k\alpha_2-1)!} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} \frac{(-1)^j}{j+k\alpha_2} \right\} \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

ここで (6.4.4) 式より

$$\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B-1} dx = A^{i-1} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{\{t^{u+B} - ((l-1)T)^{u+B}\}}{u+B} \quad (6.4.8)$$

$$\begin{aligned} &\int_{(l-1)T}^t (A(t-x))^{i-1} x^{B-1+k\alpha_2} dx \\ &= A^{i-1} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{\{t^{u+B+k\alpha_2} - ((l-1)T)^{u+B+k\alpha_2}\}}{u+B+k\alpha_2} \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

(6.4.8) 式と (6.4.9) 式をそれぞれ式 (6.4.7) に代入することにより,

$$\begin{aligned} g_l(t) &= \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{e^{-At-D}}{(i-1)!} \left[ \frac{A^{B+i-1}}{(B-1)!} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} \frac{(-1)^u (t^{u+B} - ((l-1)T)^{u+B})}{(u+B)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^B e^{-D}}{(B-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k A^{k\alpha_2+i-1}}{k!(k\alpha_2-1)!} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(t^{u+B+k\alpha_2} - ((l-1)T)^{u+B+k\alpha_2})}{u+B+k\alpha_2} \sum_{j=0}^{B-1} \binom{B-1}{j} \frac{(-1)^j}{j+k\alpha_2} \right] \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

最後に  $A, B, D$  を元に戻す.

$$g_l(t) = \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{e^{-\alpha_1 \mu_1 t - \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T}}{(i-1)!} \left[ \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + i - 1}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} \frac{(-1)^u \{t^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1}} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1}}\}}{(u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1})} \\
& + \frac{A^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{(l-1)} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1} - 1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^{(l-1)} \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_1 \mu_1)^{k\alpha_2 + i - 1}}{k! (k\alpha_2 - 1)!} \\
& \times \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{\{t^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1} + k\alpha_2} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1} + k\alpha_2}\}}{u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1} + k\alpha_2} \\
& \times \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{(l-1)} N^{l_1} - 1}{j} \frac{(-1)^j}{j + k\alpha_2} \quad (6.4.11)
\end{aligned}$$

したがって  $WT_1^l$  の分布関数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) &= F_{S_1^l}(t) F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\
&\quad - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t + (l-1)T) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (6.4.12)
\end{aligned}$$

但し  $\alpha_1 \mu_1 \neq \alpha_2 \mu_2$  の時は  $F_{E_l}(t), g_l(t)$  は (6.3.25) 式, (6.4.6) 式で与えられ,  $\alpha_1 \mu_1 = \alpha_2 \mu_2$  の時は  $F_{E_l}(t), g_l(t)$  は (6.3.28) 式, (6.4.11) 式, で与えられる. また, 積分と極限の順序を入れ替え可能であることから (6.3.20) 式を  $\alpha_1 \mu_1 \rightarrow \alpha_2 \mu_2$  とすると (6.3.21) 式に収束する. したがって (6.3.25) 式と (6.4.6) 式において  $\alpha_1 \mu_1 \rightarrow \alpha_2 \mu_2$  とすると (6.3.25) 式と (6.4.6) 式はそれぞれ (6.3.28) 式, (6.4.11) 式に収束する.

## 6.4.2 初診患者の待ち時間の分布関数の導出

次に初診患者の待ち時間の分布関数を導出する. 初診患者の待ち時間の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0 \text{ の時}) \\ 0 & (t < 0 \text{ の時}) \end{cases} \quad (6.4.13)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}
& P(E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) \\
&= \frac{\gamma((\alpha_1 \mu_1)(t + t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}) \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)))}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}} \\
&+ \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)))}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T))^k (\alpha_2 \mu_2)^{k\alpha_2}}{k! (k\alpha_2 - 1)!} \\
&\sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} (-1)^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2(t+t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1}} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w (j+k\alpha_2-1 P_w) \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2(t+t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - w - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + k\alpha_2 - 1 - w}} \\
& \left. + \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1(t+t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - j)(-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)!}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - j} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k\alpha_2}} \right\} \quad (6.4.14)
\end{aligned}$$

である.

## 第 7 章

# 1 つの診療科に医師が 2 人存在するモデル (アーランサービスの場合)

次に 1 つの診療科に医師が 2 人存在する場合のモデルを拡張後のモデルにて考察する. モデル拡張後も次の医師を並列させることによりモデルを考える.

- ① 予約患者のみ診察する
- ② 初診患者のみ診察する
- ③ 予約患者と初診患者を共に診察する

ここで初診患者を各医師で分ける方法に関して考察する. 本章では枠毎に到着率が異なるモデルを 2 人の医師のものに拡張するため, 枠毎に奇数番目に来院する患者と偶数番目に来院する患者を数える.

但し, 全ての枠で 1 番目の医師が各枠で奇数番目に来院した初診患者を診察し, 2 番目の医師が偶数番目に来院した患者を診察すると仮定すると, 1 番目の医師が診察する初診患者の人数が増える. 実際に図 7.1 を見ると, 3 枠終了までに 1 番目の医師が診察する初診患者の人数は 6 人, 2 番目の医師が診察する初診患者の人数は 4 人となり, 1 番目の医師が診察する初診患者の人数が 2 人多くなる (表 7.1).

そこで各枠で各医師が診察する患者の到着の順番を入れ替える. 具体的には 1 枠で 1 番目の医師が奇数番目に来院した初診患者を診察し, 2 番目の医師が偶数番目に来院した初診患者を診察する. 2 枠では 1 番目の医師が偶数番目に来院した初診患者を診察し, 2 番目の医師が奇数番目に来院した初診患者を診察する.

これより図 7.1 の例において 各医師がそれぞれ 5 人の初診患者の診察を行うことになり, 各医師において診察する人数が同じになる. 待ち行列の種類は以下のものが考えられる.

- (1) 患者種類が予約患者のみである待ち行列モデル  $D^{N_1}/E_{\alpha_1}/1$
- (2) 患者種類がポアソン到着に従い来院する初診患者のみである待ち行列モデル  $M^l/E_{\alpha_i}/1$
- (3) 患者種類が一般の到着過程に従い来院する初診患者のみである待ち行列モデル  $GI/E_{\alpha_i}/1$
- (4) 予約患者とポアソン到着に従い来院する初診患者が共に並ぶ待ち行列モデル  $M^l + D^{N_d}/E_{\alpha_i}/1$
- (5) 予約患者と一般の到着過程に従い来院する初診患者が共に並ぶ待ち行列モデル  $GI + D^{N_d}/E_{\alpha_i}/1$

但し, (3), (5) の待ち行列は次の 2 つの場合に分けられる.

- 奇数番目の枠で奇数番目に来院する初診患者を診察し、偶数番目の枠で偶数番目に来院する初診患者を診察するモデル
- 奇数番目の枠で偶数番目に来院する初診患者を診察し、偶数番目の枠で奇数番目に来院する初診患者を診察するモデル

分布関数の導出のために次の記号を定義する.

#### 記号の定義

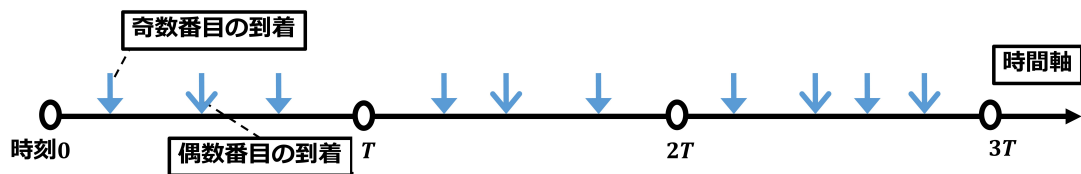


図 7.1: モデルを拡張後の初診患者の数のえ方

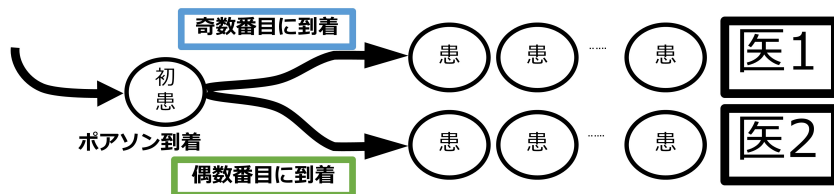
表 7.1: 各医師が診察する初診患者の人数 (人)

(a) 診察する患者の到着番号を入れ替えない

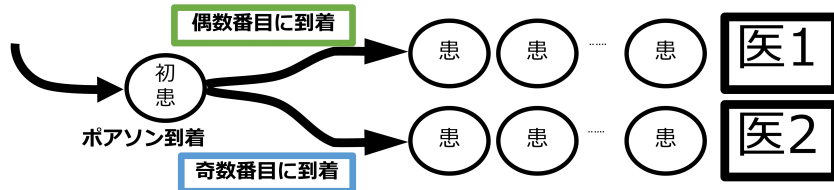
枠番号	医師 1	医師 2
1	2	1
2	2	1
3	2	2
合計	6	4

(b) 診察する患者の到着番号を入れ替える

枠番号	医師 1	医師 2
1	2	1
2	1	2
3	2	2
合計	5	5



(a)  $2l - 1$  枠 ( $l \geq 1$ ) に来院する初診患者の分け方



(b)  $2l$  枠 ( $l \geq 1$ ) に来院する初診患者の分け方

図 7.2: モデルを拡張後の初診患者の分け方

集合

$D$ : 医師の種類集合

$D = \{1, 2\}$ ;  $d = 1$ : 予約患者のみ診察する医師,  $d = 2$ : 予約患者, 初診患者共に診察する医師

定数

$N_d^l$ : 医師  $d$  が  $l$  枠において診察を行う予約患者の人数 ( $d \in D, l \in L, N_1^l + N_2^l = N^l$ )

## 7.1 待ち行列モデル $D^{N_d^l}/E_{\alpha_1}/1$ における予約患者の待ち時間の分布関数の導出

待ち行列モデル  $D^{N_d^l}/E_{\alpha_1}/1$  における  $WT_1^l$  の分布関数の導出を行う。医師 1 の予約患者の待ち時間は

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (7.1.1)$$

となるため、分布関数は

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t + (l-1)T - x)f_{E_{l-1}}(x)dx \quad (7.1.2)$$

となる。ここで (7.1.2) 式を計算するため、 $E_l$  の密度関数と分布関数、 $S_1^l$  の分布関数を導出する。

$E_l$  はパラメータ  $(\alpha_1\mu_1, \alpha_1)$  のアーラン分布に従う確率変数の  $\sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1}$  個の和の分布関数となるため、平均  $\sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1}/\mu_1$ 、次数  $\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1}$  のアーラン分布にしたがう。したがって  $E_l$  の密度関数と分布関数、 $S_1^l$  の分布関数はそれぞれ次のようになる。

$$f_{E_l}(t) = \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1} - 1)!} t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1} - 1} e^{-\alpha_1\mu_1 t} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (7.1.3)$$

$$F_{E_l}(t) = 1 - \exp(-\alpha_1\mu_1 t) \sum_{n=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1} - 1} \frac{(\alpha_1\mu_1 t)^n}{n!} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (7.1.4)$$

$$F_{S_1^l}(t) = 1 - e^{-\alpha_1\mu_1 t} \sum_{j=1}^{N_1^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1-1} \frac{(\alpha_1\mu_1 t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{1}{N_1^l} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (7.1.5)$$

$E_l$  の密度関数と  $S_1^l$  の分布関数を用いて (7.1.2) 式の第 2 項の計算を行う。

$$\begin{aligned} & \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t-x)f_{E_{l-1}}(x)dx \\ &= F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N_1^l} e^{-\alpha_1\mu_1(t-x)} \\ & \quad \times \sum_{j=1}^{N_1^l-1} \sum_{n=0}^{j\alpha_1-1} \frac{(\alpha_1\mu_1(t-x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x)dx \\ &= F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \int_{(l-1)T}^t \frac{1}{N_1^l} e^{-\alpha_1\mu_1(t-x)} \sum_{j=1}^{N_1^l-1} \sum_{n=0}^{j\alpha_1-1} \frac{(\alpha_1\mu_1(t-x))^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1} e^{-\alpha_1 \mu_1 x}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1)!} dx \\
& = F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}} e^{-\alpha_1 \mu_1 t}}{N_1^l (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1)!} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^{N_1^l - 1} \sum_{n=0}^{j\alpha_1 - 1} \frac{\int_{(l-1)T}^t (\alpha_1 \mu_1 (t-x))^n x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1} dx}{n!} \quad (7.1.6)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \int_{(l-1)T}^t (\alpha_1 \mu_1 (t-x))^n x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1} dx \\
& = (\alpha_1 \mu_1)^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{\{t^{s+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}} - ((l-1)T)^{s+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}}\}}{s + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}} \quad (7.1.7)
\end{aligned}$$

となる. (7.1.7) 式を (7.1.6) 式に代入する.

$$\begin{aligned}
& \int_{(l-1)T}^\infty F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx = \int_{(l-1)T}^\infty F_{S_1^l}(t-x) f_{E_{l-1}}(x) dx \\
& = F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \frac{1}{N_1^l (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1)!} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^{N_1^l - 1} \sum_{n=0}^{j\alpha_1 - 1} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} + n} \\
& \quad \times \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{e^{-\alpha_1 \mu_1 t} t^{n-s} (-1)^s \{t^{s+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}} - ((l-1)T)^{s+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}}\}}{(s + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}) n!} \quad (7.1.8)
\end{aligned}$$

(7.1.8) 式を (7.1.2) 式に代入することにより予約患者の待ち時間の分布関数は

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) & = F_{S_1^l}(t) F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - \frac{1}{N_1^l (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} - 1)!} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^{N_1^l - 1} \sum_{n=0}^{j\alpha_1 - 1} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1} + n} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} (t+(l-1)T)^{n-s}}{n!} \\
& \quad \times \frac{(-1)^s \{(t+(l-1)T)^{s+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}} - ((l-1)T)^{s+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}}\}}{(s + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}) n!} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (7.1.9)
\end{aligned}$$

となる.

## 7.2 待ち行列モデル $M^l/E_{\alpha_2}/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出

$WT_2^l$  は

$$WT_2^l = \max\{E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l - t_2, 0\} \quad (l \in L) \quad (7.2.1)$$

となるため、分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (7.2.2)$$

となる.  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を積率母関数を用いて計算する.

$E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  をサービス時間を表す確率変数を用いて表すと

$$E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l = \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_2^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \quad (7.2.3)$$

となる. したがって  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数は

$$\begin{aligned} & E[\exp((E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l)s)] \\ &= \exp\left(\left(\frac{\alpha_2\mu_2}{\alpha_2\mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\right) - \left(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\right)\right) \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

となる. (7.2.4) 式を逆ラプラス変換することにより  $\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)$  の密度関数を求める. (7.2.4) 式の逆ラプラス変換は (6.3.18) 式の  $D = \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)$  とすることにより次のようになる.

$$\begin{aligned} & f_{E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) \\ &= \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\right)\right) \\ &\quad \times \left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\right\}^k (\alpha_2\mu_2)^{k\alpha_2} t^{k\alpha_2-1} \exp(-\alpha_2\mu_2 t)}{k!(k\alpha_2 - 1)!}\right] \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

(7.2.5) 式を積分すると  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数は次のようになる.

$$F_{E_l' + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l}(t)$$



$$\begin{aligned}
&= \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T))) \left[ \int_0^t \delta(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^k (\alpha_2 \mu_2)^{k\alpha_2} \int_0^t \exp(-\alpha_2 \mu_2 s) s^{k\alpha_2-1} ds}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \right] \quad (7.2.6)
\end{aligned}$$

ここで不完全ガンマ関数の表記を用いると

$$\begin{aligned}
F_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) &= \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T))) \\
&\times \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^k \gamma(\mu_2 t, k\alpha_2)}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \right] \quad (7.2.7)
\end{aligned}$$

となる. したがって  $WT_2^l$  の分布関数は次のようになる.

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (7.2.8)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
P(E'_l + \sum_{k=1}^{N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) &= \exp(-(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T))) \\
&\times \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^k \gamma(\mu_2(t + t_2), k\alpha_2)}{k!(k\alpha_2 - 1)!} \right] \quad (7.2.9)
\end{aligned}$$

である.

### 7.3 待ち行列モデル $GI/E_{\alpha_2}/1$ における初診患者の待ち時間の分布関数の導出

分布関数の導出の手順を示す.

$WT_2^l$  の分布関数の導出手順

- I)  $P(N_{2,d}^{l_1}(T) = n)$  に値を代入せずに  $WT_2^l$  の分布関数を導出.
- II) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}^l(t) = n)$  の値を代入.

各ステップ毎に計算する

- I)  $P(N_{2,d}^{l_1}(T) = n)$  に値を代入せずに  $WT_2^l$  の分布関数を導出.

$WT_2^l$  は式 (6.2.2) と一致し

$$WT_2^l = \max\{E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l - t_2, 0\} \quad (l \in L) \quad (7.3.1)$$

となる. したがって  $WT_2^l$  の分布関数は

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (7.3.2)$$

となる. 次に  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を導出する.

$E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分することにより,  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を導出.

各ステップ毎に計算する.

- 1)  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数を導出.

はじめに  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  は

$$E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l = \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \quad (7.3.3)$$

となる.  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数を計算する.

$$\begin{aligned} E[\exp(s(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] &= E[\exp(s(\sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \\ &= \prod_{l_1=1}^{l-1} E[\exp(s(\sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}))] E[\exp(s(\sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

ここで, それぞれ

$$E[\exp(s(\sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}))] = \sum_{j_{l_1}=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 j_{l_1}} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.3.5)$$

$$E[\exp(s(\sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] = \sum_{j_l=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 j_l} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \quad (7.3.6)$$

各枠で初診患者が来院する人数は  $j_l (l \in L)$  人として置いている.

$$E[\exp(s(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))]$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{l_1=1}^{l-1} \sum_{j_{l_1}=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j_{l_1}} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \sum_{j_l=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j_l} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \\
&= P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\cdots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \\
&\quad \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \tag{7.3.7}
\end{aligned}$$

2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き、積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

$$\begin{aligned}
f_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
&\quad + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\cdots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \} \\
&= P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \delta(t) \\
&\quad + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\cdots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \right\} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \\
&\quad \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \tag{7.3.8}
\end{aligned}$$

ここで

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \right\} = \frac{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} t^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} \exp(-\alpha_2 \mu_2 t)}{(\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \tag{7.3.9}$$

であるため, (7.3.8) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned}
f_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) &= P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \delta(t) \\
&\quad + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\cdots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} t^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} \exp(-\alpha_2 \mu_2 t)}{(\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\
&\quad \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \tag{7.3.10}
\end{aligned}$$

3) 密度関数を積分することにより,  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を導出.

(7.3.10) 式を積分し, 分布関数を導出する.

$$\begin{aligned}
 F_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) &= P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
 &\quad + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{j_l=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \frac{\int_0^t s^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} \exp(-\alpha_2 \mu_2 s) ds}{(\sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\
 &\quad \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) ds \quad (7.3.11)
 \end{aligned}$$

不完全ガンマ関数の表記を用いてまとめると,  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 F_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) &= P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
 &\quad + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{j_l=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1})}{(\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.3.12)
 \end{aligned}$$

したがって  $WT_2^l$  の分布関数は次のようになる.

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (7.3.13)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 P(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t + t_2) &= P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
 &\quad + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{j_l=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma(\mu_2(t + t_2), \sum_{l_1=1}^l j_{l_1})}{(\sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.3.14)
 \end{aligned}$$

II) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}^l(t) = n)$  の値を代入.

はじめに

$$P(N_{2,1}^l(t) = n) = \exp(-\lambda_2^l t) \sum_{i=2n-1}^{2n} \frac{(\lambda_2^l t)^i}{i!} \quad (7.3.15)$$

$$P(N_{2,2}^l(t) = n) = \exp(-\lambda_2^l t) \sum_{i=2n}^{2n+1} \frac{(\lambda_2^l t)^i}{i!} \quad (7.3.16)$$

医師 1 の待ち行列における  $WT_2^l$  の分布関数においては, (7.3.14) 式の  $P(N_{2,1}^{2l+1}(t) = n)$  に  $\exp(-\lambda_2^{2l+1} t) \sum_{i=2n-1}^{2n} ((\lambda_2^{2l+1} t)^i / i!)$  を代入し,  $P(N_{2,1}^{2l}(t) = n)$  に  $\exp(-\lambda_2^{2l} t) \sum_{i=2n}^{2n+1} ((\lambda_2^{2l} t)^i / i!)$

を代入すればよい. 医師2の待ち行列における  $WT_2^l$  の分布関数には (7.3.14) 式の  $P(N_{2,2}^{2l}(t) = n)$  に  $\exp(-\lambda_2^{2l}t) \sum_{i=2n-1}^{2n} ((\lambda_2^{2l}t)^i/i!)$  を代入し,  $P(N_{2,2}^{2l+1}(t) = n)$  に  $\exp(-\lambda_2^{2l+1}t) \sum_{i=2n}^{2n+1} ((\lambda_2^{2l+1}t)^i/i!)$  を代入すればよい. 以上が待ち行列モデル  $M^l/E_{\alpha_i}/1$  における  $WT_2^l$  の分布関数となる.

## 7.4 待ち行列モデル $GI + D^{N_d^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ における予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の分布関数の導出

次に待ち行列モデル  $GI + D^{N_d^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$  における  $WT_i^l$  の分布関数の導出する. 次の手順で分布関数を導出する.

$GI + D^{N_d^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$  のモデルにおける  $WT_i^l$  ( $i \in I, l \in L$ ) の分布関数の導出手順

- I)  $P(N_{2,d}^l(t) = n)$  に値を代入せずに  $WT_i^l$  の分布関数を導出.
- II) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}^l(t) = n)$  の値を代入.

各ステップ毎に計算する.

- I)  $P(N_{2,d}^l(t) = n)$  に値を代入せずに  $WT_i^l$  の分布関数を導出.

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (7.4.1)$$

$$WT_2^l = \max\{E_l' + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l, t_2\} - t_2 \quad (l \in L) \quad (7.4.2)$$

(7.4.1) 式より,  $WT_1^l$  の分布関数は (6.4.1) 式の  $N^l$  を  $N_d^l$  と置いた形となる. また  $WT_2^l$  の分布関数は (3.2.11) 式の  $N_2(t)$  を  $N_{2,d}^l(t)$  と置いた形になる. そのためにそれぞれ次の関数となる.

$$\begin{aligned} F_{WT_1^l}(t) &= F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\ &\quad - \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{1}{N_d^l} \exp(-\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x)) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N_d^l-1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x))^n}{n!} f_{E_{l-1}}(x) dx \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (7.4.4)$$

(7.4.3), (7.4.4) 式より  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を導出することにより  $WT_i^l$  ( $i \in I, l \in L$ ) の分布関数を導出できることが分かる. そこで次に  $E_l$  の密度関数と分布関数,  $E_l' + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数を導出する.

はじめに  $E_l$  の密度関数と分布関数を導出する.  $E_l$  を診察時間を表す確率変数を用いて表す.

$$E_l = \sum_{l_1=1}^l \left( \sum_{k=1}^{N_d^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} \right) \quad (7.4.5)$$

次の手順で  $E_l$  の分布関数を導出する.

$E_l$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分する事により,  $E_l$  の分布関数を導出.

各ステップ毎に計算する.

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.

$$\begin{aligned} M_{E_l}(s) &= E\left[\exp\left(s \sum_{l_1=1}^l \left( \sum_{k=1}^{N_d^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} \right)\right)\right] \\ &= \prod_{l_1=1}^l \left\{ E\left[\exp\left(s \sum_{k=1}^{N_d^{l_1}} S_{1,k}^{l_1}\right)\right] E\left[\exp\left(s \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

それぞれ

$$E\left[\exp\left(s \sum_{k=1}^{N_d^{l_1}} S_{1,k}^{l_1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{N_d^{l_1}} E\left[\exp(s S_{1,k}^{l_1})\right] = \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 N_d^{l_1}} \quad (7.4.7)$$

$$E\left[\exp\left(s \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}\right)\right] = \sum_{j_{l_1}=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 j_{l_1}} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.4.8)$$

したがって

$$\begin{aligned} E[\exp(s E_l)] &= \prod_{l_1=1}^l \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 N_d^{l_1}} \sum_{j_{l_1}=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 j_{l_1}} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \\ &= \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\substack{j_l=0 \\ j_1+\cdots+j_l \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

$$\begin{aligned}
f_{E_l}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1+s}\right)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}}\right\} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T)=0) \\
&+ \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\alpha_2\mu_2}{\alpha_2\mu_2+s}\right)^{\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \left(\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1+s}\right)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}}\right\} \\
&\times \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T)=j_{l_1})
\end{aligned} \tag{7.4.10}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1+s}\right)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} \left(\frac{\alpha_2\mu_2}{\alpha_2\mu_2+s}\right)^{\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}\right\} \\
&= \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} (\alpha_2\mu_2)^{\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1)!(\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1)!} \sum_{s=0}^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1} \binom{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1}{s} \\
&\times (-1)^s \left\{ \frac{t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-2} e^{-\alpha_2\mu_2 t}}{\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1} (s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1 P_w) \\
&\times \frac{(-1)^w t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-2-w} e^{-\alpha_2\mu_2 t}}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\
&\left. - \frac{t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1-s} e^{-\alpha_1\mu_1 t} (-1)^{s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1)!}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \right\}
\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

したがって  $E_l$  の密度関数は次の形となる。

$$\begin{aligned}
f_{E_l}(t) &= \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1} e^{-\alpha_1\mu_1 t}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1)!} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T)=0) \\
&+ \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} (\alpha_2\mu_2)^{\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1)!(\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1)!} \\
&\times \sum_{s=0}^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1} \binom{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1}{s} \\
&\times (-1)^s \left\{ \frac{t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-2} e^{-\alpha_2\mu_2 t}}{\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1} (s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1 P_w) \frac{(-1)^w t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-2-w} e^{-\alpha_2\mu_2 t}}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\
&\left. - \frac{t^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}-1-s} e^{-\alpha_1\mu_1 t} (-1)^{s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}-1)!}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2\sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.4.12)$$

3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

$$\begin{aligned} F_{E_l}(t) &= (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} \frac{\int_0^t u^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1} e^{-\alpha_1 \mu_1 u} du}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)!} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\ &+ \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)! (\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\ &\times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \\ &\times \left\{ \frac{\int_0^t u^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 2} e^{-\alpha_2 \mu_2 u} du}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} \binom{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1}{w} P_w \frac{(-1)^w \int_0^t u^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 2 - w} e^{-\alpha_2 \mu_2 u} du}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\ &\left. - \frac{\int_0^t u^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1 - s} \exp(-\alpha_1 \mu_1 u) du (-1)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \right\} \\ &\times \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.4.13) \end{aligned}$$

不完全ガンマ関数の表記を用いると  $E_l$  の分布関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} F_{E_l}(t) &= \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1})}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)!} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\ &+ \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)! (\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\ &\times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \\ &\times \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} \binom{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1}{w} P_w \\ &\left. \times \frac{(-1)^w \gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{\gamma(\alpha_1\mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - s)(-1)^{s+\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!}{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - s} (\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \} \\
& \times \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.4.14)
\end{aligned}$$

次に  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数の導出を行う. はじめに  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  をサービス時間を表す確率変数を用いて表す.

$$E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l = \sum_{l_1=1}^l \sum_{k=1}^{N_d^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l \quad (7.4.15)$$

$E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数を求める.

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \\
& = E[\exp(s(\sum_{l_1=1}^l \sum_{k=1}^{N_d^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \\
& = (\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1 - s})^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} E[\exp(s(\sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \quad (7.4.16)
\end{aligned}$$

ここで  $\sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数は (7.3.7) 式と一致するため次式となる.

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(\sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_{2,d}^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \\
& = P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} (\frac{\alpha_2\mu_2}{\alpha_2\mu_2 - s})^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \\
& \quad \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \quad (7.4.17)
\end{aligned}$$

したがって  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2-(l-1)T)} S_{2,k}^l))] \\
& = (\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1 - s})^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} \{P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \\
& \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \} \\
& = \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
& + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} \\
& \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \} \tag{7.4.18}
\end{aligned}$$

(7.4.9) 式と (7.4.18) 式を比較すると  $E_l$  の積率母関数の  $\prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1})$  を  $P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1})$  と置くことにより  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l$  の積率母関数と等しくなることが分かる. したがって  $E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l$  の分布関数は次の形となる.

$$\begin{aligned}
& F_{E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l}(t) \\
& = \frac{\gamma(\mu_1 t, \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1})}{(\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)!} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
& + \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)! (\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\
& \times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \\
& \times \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1}} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} (s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w) P_w) \\
& \times \frac{(-1)^w \gamma(\alpha_2 \mu_2 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
& \left. - \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - s) (-1)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - s} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \right\} \\
& \times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \} \tag{7.4.19}
\end{aligned}$$

はじめに  $WT_1^l$  の分布関数を導出する. ここで (7.4.3) 式の  $\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} (1/N_d^l) \exp(-\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T -$

$x)) \sum_{j=1}^{N_d^l-1} \sum_{n=0}^{j-1} \{(\alpha_1 \mu_1 (t + (l-1)T - x))^n / n!\} f_{E_{l-1}}(x) dx$  を  $g_l(t + (l-1)T)$  と置き,  $g_l(t)$  の計算を行うここで6章で求めた, 待ち行列モデル  $M^l + D^{N^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  の  $E_l$  の密度関数  $GI + D^{N_d^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  の  $E_l$  の密度関数を比較する.  $M^l + D^{N^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  の  $E_l$  の密度関数の  $N^l$  を  $N_d^l$ , 添え字  $k$  を  $j_1, j_2, \dots, j_l$ , 第1項に乘じてある  $\exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)$  を  $\prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0)$  と置き, 第2項以降に乘じてある  $((\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k / k!) \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)$  を  $\prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1})$  と置くことにより待ち行列モデル  $GI + D^{N_d^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  の  $E_l$  の密度関数と等しくなる事が分かる. この関係を利用し  $g_l(t)$  を解く. 待ち行列モデル  $GI + D^{N_d^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  の  $g_l(t)$  は待ち行列モデル  $M^l + D^{N^l} / E_{\alpha_1, \alpha_2} / 1$  の  $g_l(t)$  の  $N^l$  を  $N_d^l$ , 添え字  $k$  を  $j_1, \dots, j_l$ , 第1項に乘じてある  $\exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)$  を  $\prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0)$  と置き, 第2項以降に乘じてある  $((\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^k / k!) \exp(-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)$  を  $\prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1})$  と置くことによりと等しくなる. したがって  $g_l(t)$  は次のような関数となる.

$$\begin{aligned}
g_l(t) = & \frac{1}{N_d^l} \sum_{j=1}^{N_d^l-1} \sum_{i=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{(i-1)!} \left[ \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} + i - 1} e^{-\alpha_1 \mu_1 t} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - 1)!} \right. \\
& \times \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^u \frac{\{t^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1}} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1}}\}}{u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1}} \\
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - 1)!} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\substack{j_l=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \frac{(\alpha_2 \mu_2)^{\sum_{l_1=1}^l j_{l_1} \alpha_2} \prod_{l_1=1}^l P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1})}{(\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\
& \times \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - 1}{j} \\
& \times (-1)^j \left\{ \frac{s(t; \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 2)}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} (-1)^w (j + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1) P_w \frac{s(t; \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 2 - w)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{i-1} \sum_{u=0}^{i-1} \binom{i-1}{u} t^{i-1-u} (-1)^{u+j+\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (j + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \\
& \left. \times \frac{(t^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - j} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - j}) \exp(-\alpha_1 \mu_1 t)}{u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N_d^{l_1} - j} \right\} \quad (7.4.20)
\end{aligned}$$

$WT_1^l$  の分布関数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) = & F_{S_1^l}(t) F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\
& - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t + (l-1)T) \quad (7.4.21)
\end{aligned}$$

次に  $WT_2^l$  の分布関数を導出する.

$$F_{WT_2^l}(t) = \begin{cases} P(E_l' + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (7.4.22)$$

$$\begin{aligned}
& P(E'_l + \sum_{k=1}^{N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k}^l \leq t + t_2) \\
&= \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1(t + t_2), \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1})}{(\sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)!} P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = 0) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = 0) \\
&+ \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+\dots+j_l \neq 0}}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1)! (\alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!} \\
&\times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \\
&\times \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2(t + t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1}} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} (s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w) P_w) \\
&\times \frac{(-1)^w \gamma(\alpha_2 \mu_2(t + t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1 - w} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
&- \left. \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1(t + t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - s) (-1)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}} (s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1)!}{\alpha_1 \mu_1^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_d^{l_1} - s} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1}}} \right\} \\
&\times P(N_{2,d}^l(t_2 - (l-1)T) = j_l) \prod_{l_1=1}^{l-1} P(N_{2,d}^{l_1}(T) = j_{l_1}) \tag{7.4.23}
\end{aligned}$$

II) I) で導出した分布関数に  $P(N_{2,d}^l(t) = n)$  の値を代入.

奇数番目の枠で奇数番目に来院する初診患者を診察し、偶数番目の枠で偶数番目に来院する初診患者を診察するモデルにおける  $WT_i^l$  の分布関数に (7.4.21) 式と (7.4.23) 式の  $P(N_{2,d}^{2l+1}(t) = n)$  に  $\exp(-\lambda_2^{2l+1}t) \sum_{i=2n-1}^{2n} ((\lambda_2^{2l+1}t)^i / i!)$  を代入し、偶数番目の枠番号  $2l$  に対しては  $\exp(-\lambda_2^{2l}t) \sum_{i=2n}^{2n+1} ((\lambda_2^{2l}t)^i / i!)$  を代入すればよい. 偶数番目の枠で奇数番目に来院する初診患者を診察し、奇数番目の枠で偶数番目に来院する初診患者を診察するモデルにおける  $WT_i^l$  の分布関数に (7.4.21) 式と (7.4.23) 式の  $P(N_{2,d}^{2l}(t) = n)$  に  $\exp(-\lambda_2^{2l}t) \sum_{i=2n-1}^{2n} ((\lambda_2^{2l}t)^i / i!)$  を代入し、 $\exp(-\lambda_2^{2l+1}t) \sum_{i=2n}^{2n+1} ((\lambda_2^{2l+1}t)^i / i!)$  を代入すればよい.

以上が待ち行列モデル  $GI + D_{N_d}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$  における  $WT_i^l$  の分布関数となる.

## 第 8 章

# 実データを用いたモデル (各枠に来院した初診患者を全て枠の中で診察) の検証

### 8.1 モデルの検証方法

本章では, われわれが作成した診察待ち時間モデルにより算出された平均待ち時間と診察待ち時間の分散値を用いて 実際の病院の診察待ち時間をどのように評価しているか検証する. 実際の診察待ち時間については, 石井富美氏から, 診察待ち時間調査の研究 [9] のデータの提供を受けた. その中から 5 人の医師 (以降医師 a から医師 e と呼ぶ) の各医師の診療実績のデータを用いて医師が 1 人の場合のモデルの検証を行った. これらのデータには

- 予約患者の予約時刻
- 初診患者の到着時刻
- 各患者の診察開始時刻
- 各枠における予約可能人数
- 患者一人当たりの平均診察時間

が載っている. これらの情報から比較対象の病院の診察待ち時間とモデルで計算する際の各パラメータを算出した. 本論には一例として医師 a の診療実績のデータ (表 8.1, 図 8.1) を載せる.

### 8.2 データの診察待ち時間修正方法

表 8.1: 医師 a に予約可能な人数 ([9] の基礎データより)

予約時間帯	予約数	診療人数実績		
		実績	予約	当日
9:00:00	3	3	3	
9:30:00	3	4	3	1
10:00:00	3	3	2	1
10:30:00	3	2	2	
11:00:00	3	3	3	

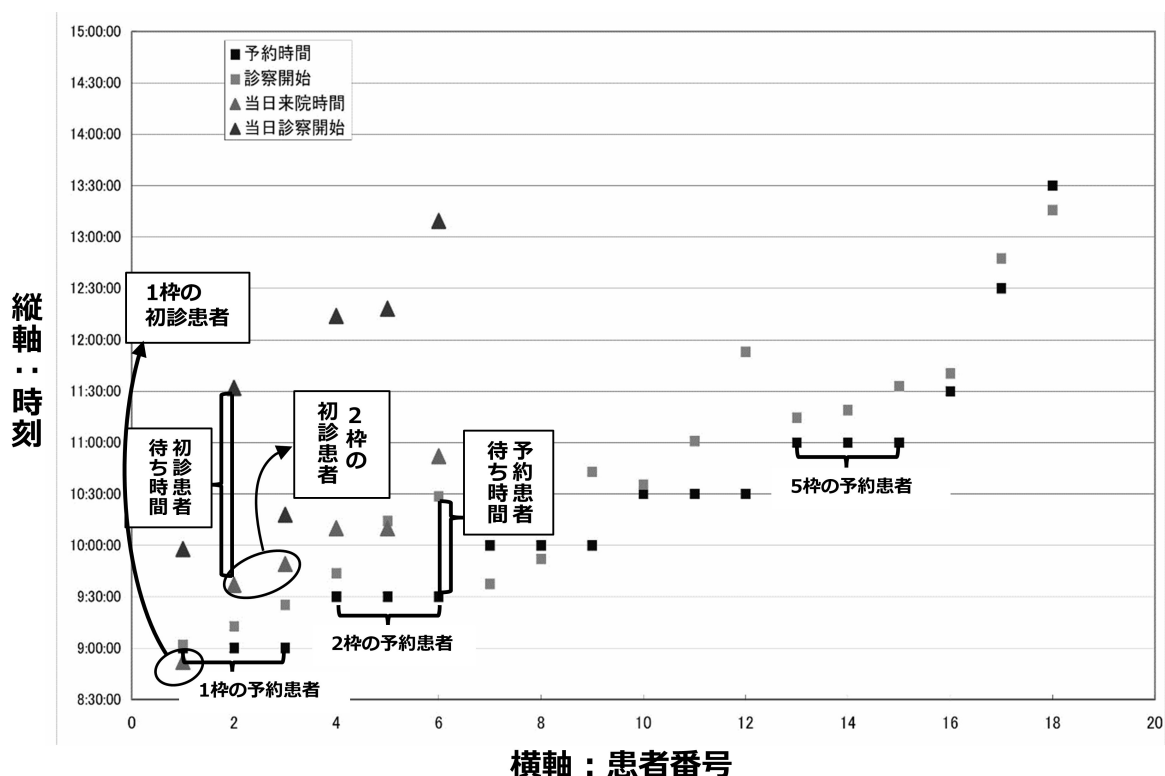


図 8.1: 医師 a が診察した各患者の到着時刻と診察開始時刻 ([9] の基礎データより)

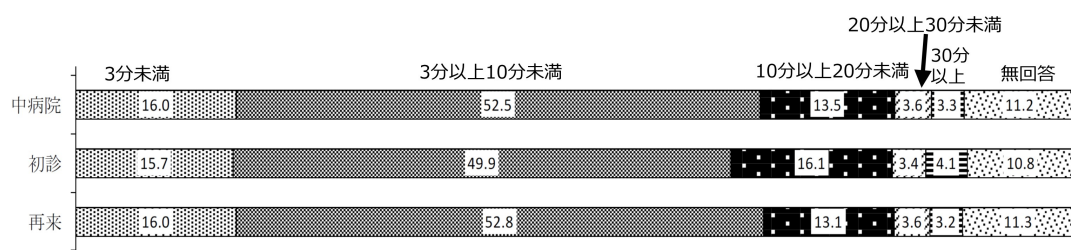


図 8.2: 受療行動調査の中病院における診察時間の分布 ([3] のデータより)

図 8.1 は横軸が患者番号, 縦軸が時間軸となっており, 患者番号 1 番の予約患者と初診患者のデータが左からそれぞれ載っている. 予約患者は早い時刻に予約を取った患者から, 初診患者は早い時刻に来院した患者からそれぞれ若い番号を付与されている. 図 8.1 には

- 予約患者の予約時刻 (黒の四角)
- 予約患者の診察開始時刻 (灰色の四角)
- 初診患者の到着時刻 (灰色の三角)
- 診察開始時刻 (黒色の三角)

が載っている. これらのデータから各患者の待ち時間を以下のように置いた.

- 予約患者の診察待ち時間 : 診察開始時刻 (灰色の四角) から予約時刻 (黒の四角) までの長さ

- 初診患者の診察待ち時間：時刻  $(l-1)T$  から診察開始時刻 (黒の三角) までの長さ

ここで  $l$  枠に来院した初診患者は到着時刻が時刻  $(l-1)T$  から  $lT$  の間の患者であるとし、初診患者の到着時刻は  $(l-1)T$  と置き換え計算している。ただし、午前 9 時以前に来院した患者は 1 枠に来院する患者と仮定して計算した。

また [9] に「各予約枠 (30 分単位) に 1 名分の余裕を持たせ、予約外の患者が来院した場合にその枠に順次入れていく運用を科内で統一した」との記述があるため、この割り当て方に基づいていない箇所は患者の診察順序を入れ替え、早い時刻に来院した初診患者から早い枠に診察を受ける事が出来るように並べ替えた。

さらにわれわれのモデルでは異なる枠における予約患者の間での診察順序の入れ替えを考慮していない。そのため、枠番号の異なる予約患者の間で診察順序の入れ替えが起こっている箇所を、早い時刻に予約したもののから診察を開始するように並べ変えた。何故このような順序で診察を行っているか不明ではあるが、おそらく診察時間の長さや検査の有無が関係している。モデルとの比較のために患者の並べ替えを行い、並べ替えた後の各患者の診察待ち時間を計算し直した。

### 8.3 待ち行列モデル $M + D^{N^l}/M/1$ の検証

#### 8.3.1 パラメータの設定

初めに、待ち行列モデル  $M + D^{N^l}/M/1$  で各患者の診察待ち時間を計算する際のパラメータ算出方法を述べる。 $l$  ( $l \in L$ ) 枠に来院する各患者の診察待ち時間を計算する際に必要なパラメータは以下の 5 種類である。

##### 設定できるパラメータ

- (1)  $l$  枠の予約可能人数  $N^l$  ( $l \in L$ )(人)
- (2) 1 枠の時間  $T$ (分)

##### データから推定するパラメータ

- (3)  $l$  枠に来院する初診患者の到着時刻  $t_2$ (分)
- (4)  $l$  枠の初診患者到着率  $\lambda_2^{(l)}$  ( $l \geq 2$ ) (人/60 分)
- (5) 各患者の平均診察時間  $1/\mu_i$  ( $i \in I$ )(分)

ここで (3) は枠毎に値が異なるため、 $\lambda_2$  の右上に括弧付きで添え字  $l$  を付与し  $\lambda_2^{(l)}$  ( $l \geq 2$ ) と置いた。この記法はモデルの検証時のみ用いる。

以下にパラメータ (1), (2), (3) の設定方法とパラメータ (4), (5) の算出方法を示す。

##### 設定できるパラメータ

- (1)  $l$  枠の予約可能人数  $N^l$  ( $l \in L$ )(人)：表 8.1 にある予約数の列の値
- (2) 1 枠の時間  $T$ (分)：全医師で 30 分

##### データから推定するパラメータ

- (3)  $l$  枠に来院する初診患者の到着時刻  $t_2$ (分):  $l$  枠の開始時刻  $(l-1)T$
- (4)  $l$  枠の初診患者到着率  $\lambda_2^{(l)} (l \geq 2)$  (人/60 分): (時刻 0(実際の病院においては 9:00) から  $l-1$
- (5) 各患者の平均診察時間  $1/\mu_i (i \in I)$ (分)
  - 5.1) 平成 20 年度の受療行動調査 [3] を用いて, 再来患者, 初診患者の平均診察時間の比を算出
  - 5.2) 初診患者, 予約患者それぞれの来院人数のデータで医師毎の平均診察時間を比で分割

5.1) では図 8.2 の中病院における診察時間の分布を用いて, 再来患者を予約患者と考え, 初診患者と予約患者それぞれの平均診察時間の比を求めた. 各患者の平均診察時間は図 8.2 の無回答の割合を除き, 各区間の真ん中の値を代表値として算出している. 5.2) では初診患者, 予約患者それぞれの来院人数のデータを用いて, 医師毎の平均診察時間を 5.1) で求めた比で分けることにより, 予約患者平均診察時間と初診患者平均診察時間を算出している. また初診患者の到着率の平均値を定め,

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\sum_{l=2}^6 \lambda_2^{(l)}}{5}$$

とし, 各医師の初診患者の到着率の目安とした. モデルで計算する際の各医師におけるパラメータは表 8.2 にまとめた. ここで  $C_i^{l*} (i \in I)$  は時刻  $(l-1)T$  までに到着するために,  $l$  枠開始時刻  $(l-1)T$  までに来院する初診患者の人数のみ  $l$  枠に来院する各患者の待ち時間に関係することに注意する. そのために, 図 8.1 では 1 枠に 1 人初診患者が来院しているが, 1 枠の初診患者到着率は「-」となっている. モデルの検証の結果に  $\bar{\lambda}_2$  が大きく影響したため,  $\bar{\lambda}_2$  が大きい時 ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ ), 小さい時 ( $\bar{\lambda}_2 < 3$ ) で表を分けて載せた.

医師 a から医師 e までの診察待ち時間の比較結果をそれぞれ図 10.10 と図 10.11 にまとめる. 結果は小数点第 3 位を四捨五入した数値となる. 表 8.2 には 6 枠までパラメータを載せたが, 数値誤差の関係上, 6 枠まで予約患者の診察待ち時間を算出できなかった箇所がある. そのため, 比較結果は 4 枠までのものと 5 枠までのものがある. 結果は初診患者の到着率の大きさにより推定の精度が良いものと悪いもので分かれたために, 到着率の平均値が小さい ( $\bar{\lambda}_2 < 3$ ) 時と, 大きい ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ ) 時で結果を分けて載せた. 図 10.10 より医師 a, 医師 b, 医師 c においては比較的精度の良い推定を行えていることが分かる. 図 10.11 より医師 d, 医師 e においては推定の精度が悪いことが分かる. それぞれの結果を詳しく見る.

#### 医師 a, 医師 b, 医師 c における比較結果の考察

医師 a, 医師 b, 医師 c における比較結果 (図 10.10) から, モデルにより算出された値は比較的現実の診察待ち時間の傾向を捕らえられていることがわかる. 但し, 医師 a と医師 c の予約患者の待ち時間の比較結果 (図 10.10a, 図 10.10e) を見るとモデルにより算出された値が, 比較対象の病院の待ち時間より大きいことが分かる. これは比較対象の病院では初診患者を各枠で 1 人のみ診察するが, モデルでは各枠に来院した初診患者をその枠の中で全て診察するためである.

モデルにより算出された初診患者の診察待ち時間は, 比較対象の病院より短く算出されている. これは作成したモデルにおいて医師がある枠に来院する初診患者を必ずその枠の中で診察するが, 比較対象の病院では医師が各枠で 1 番目に来院した初診患者のみ枠の中で診察し, 1 番目以降に来院した患者の診察は後ろの枠にまわされるためである. 医師 b の結果は例外的なものであり, モデルにより算出された診察待ち時間が実際の予約患者の診察待ち時間より短く算出されている. これは 1 人目の患者の診察



開始時刻が検査等の理由により非常に遅くなっているために起こった。

#### 医師 d, 医師 e における比較結果の考察

医師 d, 医師 e における結果 (図 10.11a, 図 10.11c) ではモデルにより算出された予約患者の診察待ち時間は現実の診察待ち時間より非常に長くなっている。医師 e においては 1 枠に初診患者が 5 人来院しているために実際の診察待ち時間との差異が大きくなった。実際に作成したモデルはこれら 5 人の初診患者を診察してから 2 枠の予約患者の診察を開始するために、待ち時間が非常に長く算出される。但し、比較対象の病院では 1 枠に初診患者 1 人を診察し、直ぐに 2 枠の予約患者の診察が開始されるために診察待ち時間は短くなる。

モデルにより算出された初診患者の待ち時間は比較対象の病院より非常に短く算出されている。これは比較対象の病院では 1 つの枠に複数人初診患者が来院した場合、各枠で 1 番目以降に来院した初診患者の診察は後ろの枠にまわされるが、モデルにおいては初診患者が到着した枠の中で必ず診察が終了するために起こった。

5 人の医師の結果をまとめると、比較対象の病院は初診患者を各枠で 1 人のみ診察するために、初診患者の到着率が低い ( $\bar{\lambda}_2 < 3$ ) 場合は待ち時間の推定の精度は良くなるが、初診患者の到着率が高い ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ ) 場合は待ち時間推定の精度は非常に低くなる。またいずれの場合もモデルにより算出された予約患者の待ち時間は実際の予約患者の待ち時間よりも大きな値として算出されている傾向があり、初診患者の待ち時間は実際の初診患者の待ち時間よりも短く算出されている傾向があることが分かる (但し例外 (図 10.10c) もある)。したがってモデルで算出された予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の値はそれぞれ実際の診察待ち時間の上限値と下限値を与えている。但し、初診患者の来院人数が多い場合はその差は大きくなり良い推定が行えていない。したがって診察待ち時間の推定の精度をよくするには 1 枠の中で診察する初診患者の人数を制限する必要がある。但し、このことは比較対象の病院が「初診患者を各枠で 1 人のみ診察する予約の仕組み」であるために言えることであり、他の割り当て方をしている病院では異なる結果となる。

## 8.4 待ち行列モデル $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ の検証

### 8.4.1 パラメータの設定

次に待ち行列モデル  $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$  で診察待ち時間を計算する際のパラメータに関して述べる。 $l$  ( $l \in L$ ) 枠に来院する各患者の診察待ち時間を計算する際に必要なパラメータは以下の 5 種類である。

#### 設定できるパラメータ

- (1)  $l$  枠の予約可能人数  $N^l$  ( $l \in L$ )(人)
- (2) 1 枠の時間  $T$ (分)

#### データから推定するパラメータ

- (3)  $l$  枠に来院する初診患者の到着時刻  $t_2$ (分)
- (4)  $l$  枠の初診患者到着率  $\lambda_2^l$  (人/60 分)

(5) 各患者の平均診察時間  $1/\mu_i (i \in I)$  (分)

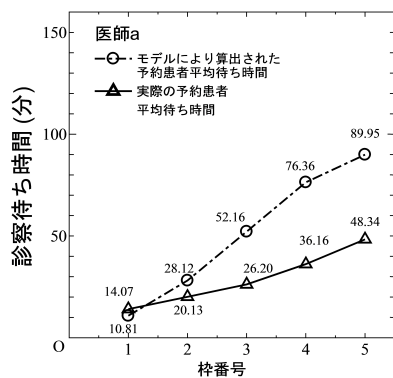
パラメータ (1), (2), (3), (5) に関しては前節で設定したものと同一である。パラメータ (4) を設定する。またアーラン分布の次数は初診患者の診察時間が予約患者より長くなる可能性を考慮し、予約患者のアーラン分布の次数  $\alpha_1$  を 2, 初診患者のアーラン分布の次数  $\alpha_2$  を 3 として設定する。

表 8.2: モデル  $M + D^{N^l}/M/1$  で計算する際の各パラメータ (小数点第3位を四捨五入)(a) 初診患者平均到着率  $\bar{\lambda}_2$  が3より小さい時

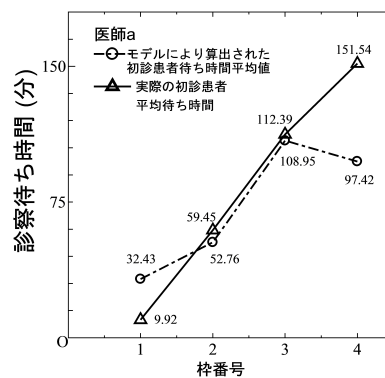
	医師 a		医師 b		医師 c	
	平均診察時間 (分)		平均診察時間		平均診察時間	
	予約患者	初診患者	予約患者	初診患者	予約患者	初診患者
	10.81	11.57	15.74	16.84	13.85	14.82
枠番号 ( $l \in L$ )	$l(l \in L)$ 枠の予約可能人数 (人)	$l(l \in L)$ 枠の初診患者到着率 (人/60分)	$l$ 枠の予約可能人数	$l$ 枠の初診患者到着率	$l$ 枠の予約可能人数	$l$ 枠の初診患者到着率
1	3	-	2	-	2	-
2	3	2	4	2	3	2
3	3	3	3	2	2	2
4	3	3.33	2	1.33	2	2
5	3	3	1	2	3	1.5
6	1	2.4	0	1.6	3	1.2
初診患者平均到着率 (人/60分)	-	<b>2.75</b>	-	<b>1.79</b>	-	<b>1.74</b>

(b) 初診患者平均到着率  $\bar{\lambda}_2$  が5より大きい時

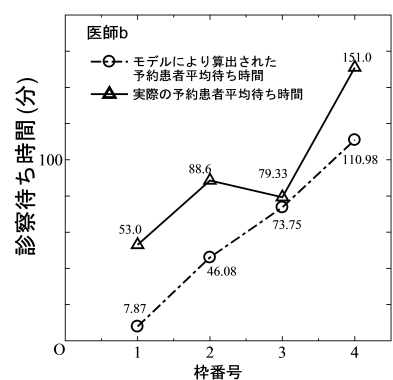
	医師 d		医師 e	
	平均診察時間 (分)		平均診察時間	
	予約患者	初診患者	予約患者	初診患者
	8.85	9.46	7.82	8.37
枠番号 ( $l \in L$ )	$l(l \in L)$ 枠の予約可能人数 (人)	$l(l \in L)$ 枠の初診患者到着率 (人/60分)	$l$ 枠の予約可能人数	$l$ 枠の初診患者到着率
1	4	-	2	-
2	3	8	4	10
3	3	6	1	8
4	2	4.67	2	6
5	3	4.5	4	5.5
6	2	3.6	2	4.4
初診患者平均到着率 (人/60分)	-	<b>5.35</b>	-	<b>6.78</b>



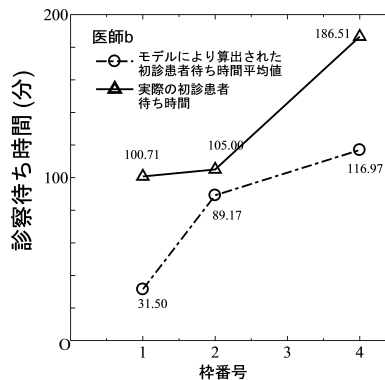
(a) 医師 a: 予約患者



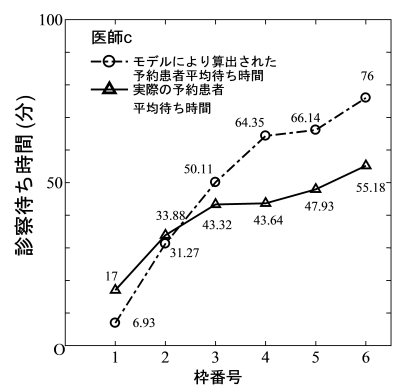
(b) 医師 a: 初診患者



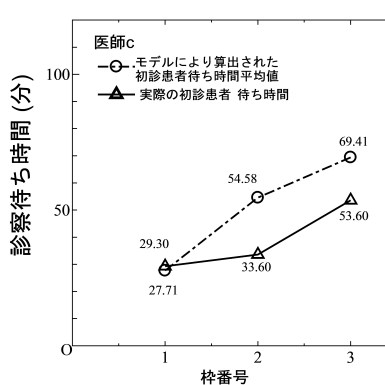
(c) 医師 b: 予約患者



(d) 医師 b: 初診患者

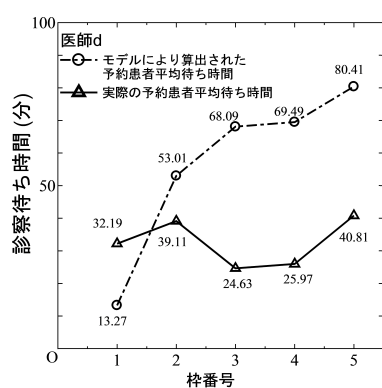


(e) 医師 c: 予約患者

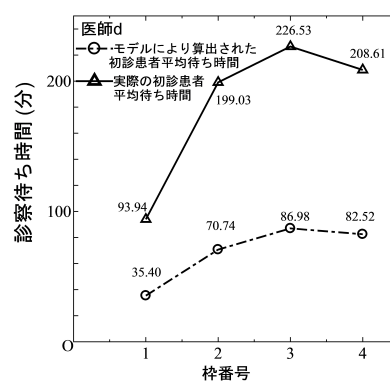


(f) 医師 c: 初診患者

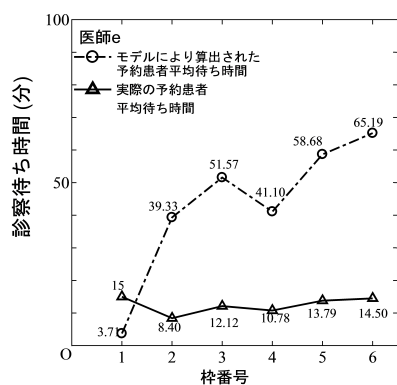
図 8.3: 各患者の診察待ち時間平均値の比較 ( $\lambda_2 < 3$ : 指数サービス)



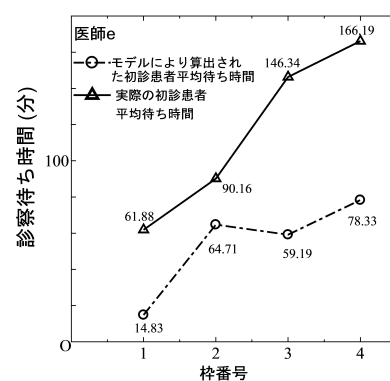
(a) 医師 d: 予約患者



(b) 医師 d: 初診患者

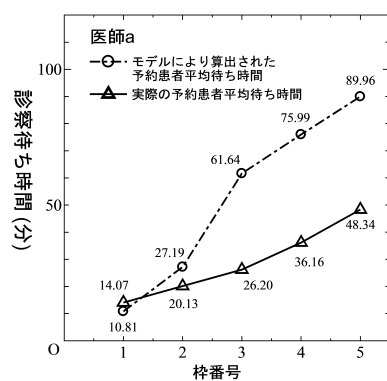


(c) 医師 e: 予約患者

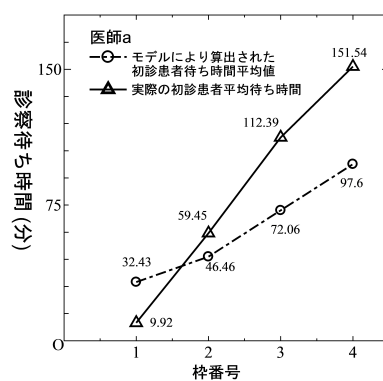


(d) 医師 e: 初診患者

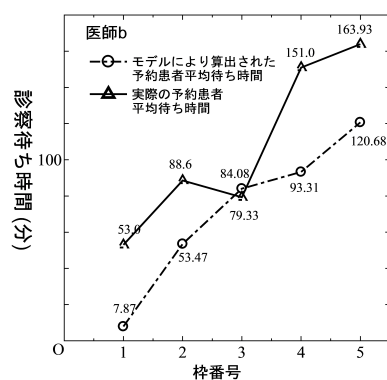
図 8.4: 各患者の診察待ち時間の平均値の比較 ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ : 指数サービス)



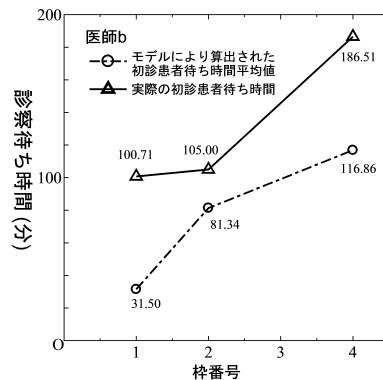
(a) 医師 a: 予約患者



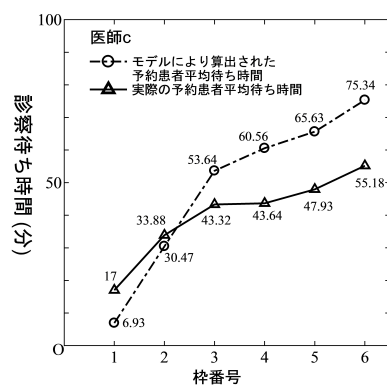
(b) 医師 a: 初診患者



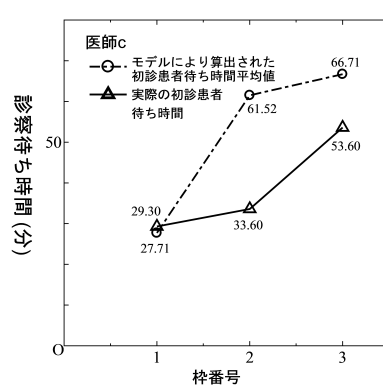
(c) 医師 b: 予約患者



(d) 医師 b: 初診患者

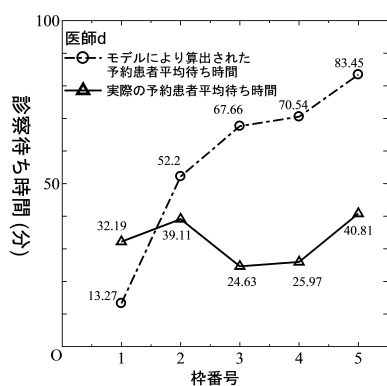


(e) 医師 c: 予約患者

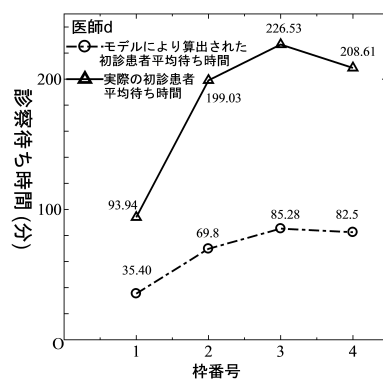


(f) 医師 c: 初診患者

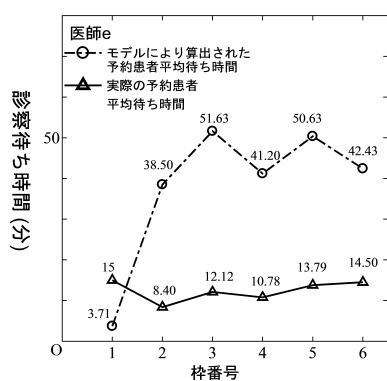
図 8.5: 各患者の診察待ち時間平均値の比較 ( $\lambda_2 < 3$ :アーランサービス)



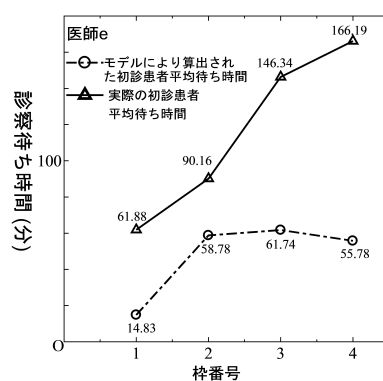
(a) 医師 d: 予約患者



(b) 医師 d: 初診患者



(c) 医師 e: 予約患者



(d) 医師 e: 初診患者

図 8.6: 各患者の診察待ち時間の平均値の比較 ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ :アーランサービス)

## 第 9 章

# 各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を設定するモデル

### 9.1 はじめに

本章では各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を制限するモデルを考える。これにより、前章で検証を行った病院の割り当て方により近いモデルを考察する。ベースとなるモデルは第 6 章のものとなり、これを改良し、モデルを作成する。主なモデルの変更点は「各枠の終了時刻までに診察が可能である初診患者の人数の上限値を定め、それを超えた場合は次の枠以降に診察が回される」ことである。次に記号の定義とモデルの詳細を説明する。

### 9.2 記号の定義とモデルの説明

本稿で扱う診察待ち時間のモデルを説明するにあたり、以下に記号の定義を行う。予約可能な予約枠の添え字集合を  $L$  ( $L = \{1, 2, 3, \dots, l_{max}\}$ )、1 枠の時間を  $T$  として定義する。時刻 0 を病院の診察開始時刻として定め、予約枠  $l$  (略称  $l$  枠) ( $l \in L$ ) を時間区間  $[(l-1)T, lT)$  として定義する。そして全ての予約枠は予約で埋まっていると仮定する。患者種類の添字集合を  $I$  とし、 $i = 1$  を予約患者 (事前に予約を取り来院する患者)、 $i = 2$  を初診患者 (予約を取らずに初めて来院する患者) として定義する。種類  $i$  の患者の診察時間は次数が  $\alpha_i$ 、平均値が  $1/\mu_i$  ( $i \in I$ ) のアラン分布に従い、すなわち患者一人当たりの診察時間は  $F_{S_{i,k}}(t) = 1 - e^{-\alpha_i \mu_i t} \sum_{i=1}^{\alpha_i} (\alpha_i \mu_i t)^{i-1} / (i-1)!$  に従う。患者種類でサービス時間が異なる。次に各患者の到着法則と診察順序を示す。

予約患者：

予約患者が  $l$  ( $l \in L$ ) 枠に来院する人数を  $N^l$  として置き、遅くともその枠の開始時刻には来院している。また、前の枠に来院した患者の診察が全て終了する時刻には診察を受けられるように、十分早めに来院していると仮定する。さらに前の枠の全ての初診患者が診察終了した後 (1 枠においては時刻 0) に、前から順に診察を受ける。

初診患者：

パラメータ  $\lambda_2^l$  のポアソン到着に従い来院し、待ち行列の最後尾に並ぶ。ここで 初診患者の診察は連続



で行われ、診察の間の空き時間が無いものと仮定する。来院した時間枠の全ての予約患者が診察終了した後に、前から順に診察を受ける。ここで  $l$  枠までに診察可能である初診患者の人数の上限  $n_l$  ( $l \in L$ ) を定め、 $l$  枠の中で初診患者の来院人数が  $n_l$  人を超えた場合は、次の枠以降にその初診患者の診察が開始されると仮定する (図 9.1)。

加えて以下の記号を定義する。

### 定数

$t_2$  : 初診患者の到着時刻

### 記号

$C_i^{l*}$  : 予約枠  $l$  に到着する、ある特定の種類  $i$  の患者 ( $i \in I, l \in L$ )

### 確率変数

$S_1^l$  : 予約枠  $l$  に到着する  $N^l$  人の予約患者の中で  $C_1^{l*}$  より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間 ( $l \in L$ )

$S_{i,k}$  : 病院の診察開始時刻から  $k$  番目に到着した種類  $i$  の患者 1 人当たりのサービス時間 ( $i \in I, l \in L$ )

$E_l$  : 予約枠  $l$  に到着した全ての初診患者のサービス終了時刻 ( $l \in L$ ) (但し,  $E_0 := 0$ )

$E'_l$  : 予約枠  $l$  に到着した全ての予約患者のサービス終了時刻 ( $l \in L$ ) (但し,  $E'_0 := 0$ )

$N_2^l(t)$  : パラメータ  $\lambda_2^l$  のポアソン過程

$WT_i^l$  :  $C_i^{l*}$  の待ち時間 ( $i \in I, l \in L$ )

### パラメータ

$(\mu_i, \alpha_i)$  :  $S_{i,k}$  (種類  $i$  の患者 1 人当たりのサービス時間) が従うアーラン分布のパラメータの組み合わせ (診察率, 次数) ( $i \in I$ )

$\lambda_2^l$  :  $l$  枠に来院する初診患者が従うポアソン到着のパラメータ

### 表記

$\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  : 確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_k$  の関数

$F_{\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)}(t)$  :  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の分布関数

$f_{\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)}(t)$  :  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の密度関数

$M_{\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)}(t)$  :  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$  の積率母関数

ここで患者 1 人当たりのサービス時間を表わす確率変数  $S_{i,k}$  は第 3 章で扱ったものと同じである。さらに、患者の来院人数は病院の診察開始時刻から数えていることに注意する。

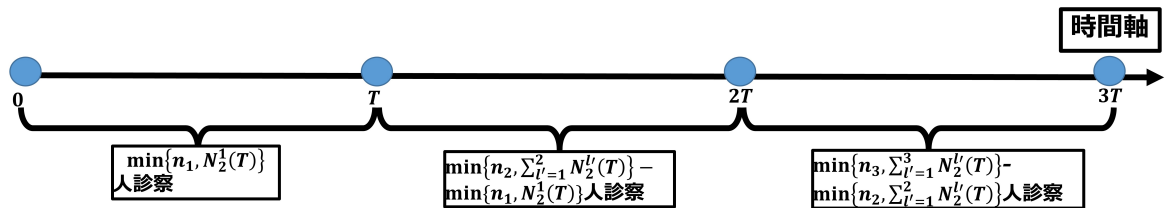


図 9.1: 枠毎の初診患者の診察人数

### 9.3 予約患者と初診患者の診察待ち時間

はじめに各患者の診察待ち時間がどのように表わすことが出来るか考察する.

#### 9.3.1 予約患者の診察待ち時間

$WT_1^l$  は次のようになる.

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \quad (9.3.1)$$

分布関数は

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t + (l-1)T - x)f_{E_{l-1}}(x)dx \quad (9.3.2)$$

となる. さらに (9.3.1) 式より期待値, 分散値や分布関数を計算出来る. ここには期待値の結果のみ載せる. 期待値, 分散値の計算の詳細は付録に載せる.

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\mu_1} + e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{\mu_2(j-1)!} \\ &+ \frac{n_{l-1}}{\mu_2} \left\{ 1 - e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \sum_{j=0}^{n_{l-1}} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \\ &- \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt + (l-1)T F_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1} (N^l - 1) \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

$f_{E_l}(t)$  と  $F_{E_l}(t)$  の導出は 9.4 節で行う.

#### 9.3.2 初診患者の診察待ち時間

初診患者は  $l$  枠までに診察可能である人数の上限値が決まっているために, 到着した枠以降に診察を開始する可能性がある. そこで時刻  $t_2$  ( $(l-1)T \leq t_2 < lT$ ) までに来院した初診患者の人数  $\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$  により,  $C_2^{l*}$  の診察開始時刻を場合分けする. 診察待ち時間は初診患者の到着時刻  $t_2$  から診察開始時刻で定義しているため, 次の 3 つの場合でそれぞれ考察する.

- (i)  $C_2^{l*}$  到着時点で初診患者の来院人数が  $l$  枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数の上限値を超えていない場合 ( $\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l$ )
- (ii)  $C_2^{l*}$  到着時点で初診患者の来院人数が  $l$  枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数の上限値を超えており, 初診患者の来院人数が  $n_{l'} + 1$  以上  $n_{l'+1}$  人以下である場合 ( $n_{l'} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'+1}$  ( $l' \in \{l, l+1, l+2, l+3, \dots\}$ ))
- (iii)  $C_2^{l*}$  到着時点で初診患者の来院人数が  $l$  枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数の上限値を超えており, 初診患者の来院人数が  $n_{l+4}$  人以上である場合 ( $n_{l+4} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$ )

(i) の時:

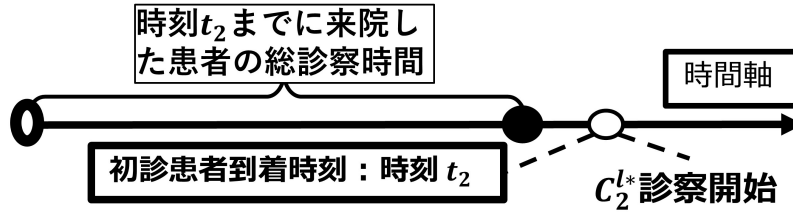
$C_2^{l*}$  到着時点で初診患者の来院人数が  $n_l$  人以下であるため,  $C_2^{l*}$  は  $l$  枠に診察を開始する.  $C_2^{l*}$  到着時点で時刻  $t_2$  までに来院した患者の診察が終了していない場合は待ち時間は時刻  $t_2$  までに来院した患者の総診察時間から  $t_2$  時間をひいたものとなる (図 9.2a). 時刻  $t_2$  時点で診察が全て終了している場合は  $C_2^{l*}$  到着時点で診察が開始されるため待ち時間は 0 となる (図 9.2b).

(ii) の時:

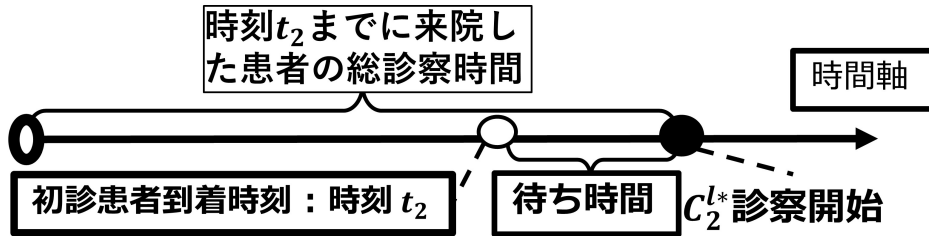
$C_2^{l*}$  到着時点で初診患者の来院人数が  $n_{l'} + 1$  ( $l' \in \{l, l+1, l+2, l+3\}$ ) 人以上で,  $n_{l'+1}$  人以下であるため,  $C_2^{l*}$  は  $l'$  枠に診察を開始する.  $l'$  枠に来院する初診患者は  $l'$  枠に来院する予約患者の診察が全て終了した後に診察を開始するために,  $C_2^{l*}$  の診察開始時刻は時刻  $t_2$  までに来院した患者の総診察時間に  $l+1$  枠から  $l'$  枠までの予約患者の総診察時間を足したものと表わされる. そのために待ち時間は時刻  $t_2$  までに来院した患者の総診察時間に  $l+1$  枠から  $l'$  枠までの予約患者の総診察時間を足したものから  $t_2$  時間をひいたものとして表わすことが出来る (図 9.3).

(iii) の時:

(ii) の時と診察待ち時間の考え方は同じである. 但し,  $C_2^{l*}$  来院時点で, 初診患者の来院人数が  $n_{l+5}$  人より多い場合も,  $l+5$  枠で診察を受けると仮定する. そのために待ち時間は時刻  $t_2$  までに来院した患者の総診察時間に  $l+1$  枠から  $l+5$  枠までの予約患者の総診察時間を足したものから  $t_2$  時間をひいたものとして表わすことが出来る (図 9.3).



(a)  $l$  枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者の診察待ち時間  $(\sum_{k=1}^{l-1} N_2^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)) S_{2,k} \geq t_2$  の時)



(b)  $l$  枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間  $(\sum_{k=1}^{l-1} N_2^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)) S_{2,k} \leq t_2$  の時)

図 9.2:  $l$  枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間 ((i)  $\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l$ )

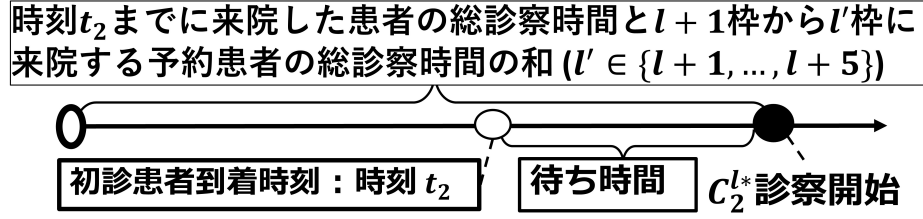


図 9.3:  $l$  枠 ( $l \in L$ ) に来院する初診患者診察待ち時間 ((ii)  $n_{l'}+1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'+1}$   $l' \in \{l, l+1, l+2, l+3\}$ , (iii)  $n_{l+4}+1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$  )

(i), (ii), (iii) の場合を式で表わすと次のようになる。

$$WT_2^l = \begin{cases} \max\left\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2, 0\right\} \\ \quad \left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l\right) \\ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2 \\ \quad (l' \in \{l+1, \dots, l+4\}, n_{l'-1}+1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'}) \\ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2 \\ \quad (n_{l+4}+1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)) \end{cases} \quad (l \in L) \quad (9.3.4)$$

(9.3.4) 式から  $WT_2^l$  の期待値と分散値、分布関数を導出出来る。期待値と分散値の計算の詳細は付録で載せる。ここには期待値の結果のみ載せる。

$$\begin{aligned} E[WT_2^l] &= \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)}{\mu_2} - t_2 \\ &+ \sum_{i=0}^{n_l} \left[ \left\{ - \int_0^{t_2} t f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt + t_2 F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t_2) \right\} \right. \\ &\times \frac{\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}^i}{i!} e^{-\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}} \left. \right] \\ &+ \sum_{l'=l+1}^{l+5} \left[ \frac{N^{l'}}{\mu_1} (1 - e^{-\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}}) \sum_{i=0}^{n_{l'}-1} \frac{\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}^i}{i!} \right] \quad (9.3.5) \end{aligned}$$

## 9.4 確率変数 $E_l$ の分布関数の導出

各枠の初診患者の診察終了時刻  $E_l$  の分布関数の導出を行う。そのために各枠の初診患者の診察終了時刻がサービス時間の確率変数を用いて表す。

$$E_l = E_{l-1} + \sum_{k=\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}+1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=\min\{n_{l-1}, \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)\}+1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k}$$

$$\begin{aligned}
&= E_{l-2} + \sum_{k=\sum_{l_1=1}^{l-2} N_2^{l_1} + 1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\} + 1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} = \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \tag{9.4.1}
\end{aligned}$$

$E_l$  の分布関数を次の手順で計算する.

$E_l$  の分布関数の導出手順

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.
- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き、積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.
- 3) 密度関数を積分することにより、 $E_l$  の分布関数を導出.

各ステップ毎の計算過程を示す.

- 1)  $E_l$  の積率母関数を導出.

$\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}} S_{1,k}$  と  $\sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k}$  の独立性より

$$M_{E_l}(s) = E[\exp(s \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}} S_{1,k})] E[\exp(s \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k})] \tag{9.4.2}$$

ここで

$$E[\exp(s \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}} S_{1,k})] = \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}}} \tag{9.4.3}$$

である. また、全確率の公式より

$$\begin{aligned}
E[\exp(s \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k})] &= \sum_{j=0}^{\infty} E[\exp(s \sum_{k=1}^{\min\{n_l, j\}} S_{2,k})] P(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n_l} E[\exp(s \sum_{k=1}^j S_{2,k})] P(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j) \\
&\quad + \sum_{j=n_l+1}^{\infty} E[\exp(s \sum_{k=1}^{n_l} S_{2,k})] P(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j) \tag{9.4.4}
\end{aligned}$$

となる.  $S_{2,k}$  の独立性より

$$E[\exp(s \sum_{k=1}^j S_{2,k})] = \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \tag{9.4.5}$$

であるため,

$$\begin{aligned}
 E[\exp(s \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k})] &= \sum_{j=0}^{n_l} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} P\left(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j\right) \\
 &+ \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 n_l} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} P\left(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j\right) \right\}
 \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

となる.  $\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)$  はポアソン分布に従うため

$$\begin{aligned}
 M_{E_l}(s) &= \sum_{j=0}^{n_l} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 n_l} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \right\} \\
 &= \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_l} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 n_l} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \right\}
 \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

となる.

- 2) 積率母関数のパラメータ  $s$  を  $-s$  と置き, 積率母関数を逆ラプラス変換することにより  $E_l$  の密度関数を導出.  $\mathcal{L}^{-1}$  は逆ラプラス変換を表すとする.

$$\begin{aligned}
 f_{E_l}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 + s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \right\} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_l} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 + s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 j} \right\} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
 &+ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 + s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 n_l} \right\} \\
 &\times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\}
 \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

ここで  $f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 + s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 j} \right\}$  であるため,

$$\begin{aligned}
 f_{E_l}(t) &= (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} e^{-\alpha_1 \mu_1 t - \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_l} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!}
 \end{aligned}$$

$$+ f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{N^{l_1}}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_l} S_{2,k}}(t) \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \quad (9.4.9)$$

ここで

a)  $\alpha_1 \mu_1 \neq \alpha_2 \mu_2$

$$\begin{aligned} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{N^{l_1}}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 + s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 + s} \right)^{\alpha_2 j} \right\} \\ &= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 j - 1)!} \\ &\times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \left\{ \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 2} e^{-\alpha_2 \mu_2 t}}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 j - 1} (s + \alpha_2 j - 1 P_w) \frac{(-1)^w t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 2 - w} e^{-\alpha_2 \mu_2 t}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\ &\left. - \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1 - s} e^{-\alpha_1 \mu_1 t} (-1)^{s + \alpha_2 j} (s + \alpha_2 j - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 j}} \right\} \end{aligned} \quad (9.4.10)$$

b)  $\alpha_1 \mu_1 = \alpha_2 \mu_2$

$$\begin{aligned} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{N^{l_1}}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 + s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j} \right\} \\ &= (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j} \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1)!} e^{-\alpha_1 \mu_1 t} \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

である.

3) 密度関数を積分することにより,  $E_l$  の分布関数を導出.

$$\begin{aligned} F_{E_l}(t) &= \int_0^t f_{E_l}(t) dt \\ &= \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}, \alpha_1 \mu_1 t) e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\ &+ \sum_{j=1}^{n_l} F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{N^{l_1}}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\ &+ F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{N^{l_1}}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_l} S_{2,k}}(t) \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

ここで

a)  $\alpha_1 \mu_1 \neq \alpha_2 \mu_2$

$$F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{N^{l_1}}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) = \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 j - 1)!}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{s} \\
& \times (-1)^s \left\{ \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1, \alpha_2 \mu_2 t)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 \sum_{l_1=1}^l j_{l_1} - 1} \binom{s + \alpha_2 j - 1}{w} \frac{(-1)^w \gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1 - w, \alpha_2 \mu_2 t)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1 - w} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
& \left. - \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - s, \alpha_1 \mu_1 t) (-1)^{s + \alpha_2 j} (s + \alpha_2 j - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - s} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 j}} \right\} \quad (9.4.13)
\end{aligned}$$

b)  $\alpha_1 \mu_1 = \alpha_2 \mu_2$

$$F_{\sum_{k=1}^l N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) = \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j, \alpha_1 \mu_1 t)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 j - 1)!} \quad (9.4.14)$$

である。

## 9.5 予約患者の診察待ち時間の分布関数と密度関数の導出

$E_l$  の密度関数を用いて (9.3.2) 式の第2項を計算する。

$$\begin{aligned}
& \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t + (l-1)T - x) f_{E_{l-1}}(x) dx = F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) - F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\
& - \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x)} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{N^l} \frac{(\alpha_1 \mu_1 (t + (l-1)T - x))^{k-1}}{(k-1)!} f_{E_{l-1}}(x) dx \quad (9.5.1)
\end{aligned}$$

$g_l(t) := \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \{e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x)} / N^l\} \{(\alpha_1 \mu_1 (t + (l-1)T - x))^{k-1} / (k-1)!\} f_{E_{l-1}}(x) dx$  とし、計算する。

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x)}}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1 (t + (l-1)T - x))^{k-1}}{(k-1)!} \left[ \right. \\
& \times \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} e^{-\alpha_1 \mu_1 x - \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \\
& + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} f_{\sum_{k=1}^{l_1-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(s) e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
& \left. + f_{\sum_{k=1}^{l_1-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_{l-1}} S_{2,k}}(s) \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \right] dx \\
&= \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{(k-1)!} \\
& \times \left[ \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T) - \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} (\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x))^{k-1} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} dx \\
& + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \{e^{-\alpha_1 \mu_1(t+(l-1)T-x)} (\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x))^{k-1} \\
& \times \int_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}} (x) dx e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
& + \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \{e^{-\alpha_1 \mu_1(t+(l-1)T-x)} (\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x))^{k-1} \\
& \times \int_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_{l-1}} S_{2,k}} (x) dx \} \{1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!}\} \} \quad (9.5.2)
\end{aligned}$$

ここで  $S_i(t) := \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{-\alpha_1 \mu_1(t+(l-1)T-x)} (\alpha_1 \mu_1(t+(l-1)T-x))^{k-1} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(x) dx$  とし, (9.5.2) 式をまとめると,

$$\begin{aligned}
g_l(t) &= \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^{l-1}} \sum_{k=1}^j \frac{1}{(k-1)!} \\
& \times \left[ \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\alpha_1 \mu_1(t+(l-1)T) - \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \right. \\
& \times \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} (\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x))^{k-1} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} dx \\
& + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} S_j(t) e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
& \left. + S_{n_{l-1}}(t) \{1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!}\} \right] \quad (9.5.3)
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}
& \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} (\alpha_1 \mu_1(t + (l-1)T - x))^{k-1} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} dx \\
& = (\alpha_1 \mu_1)^{k-1} \sum_{u=0}^{k-1} \binom{k-1}{u} (t + (l-1)T)^{k-1-u} (-1)^u \\
& \times \frac{\{(t + (l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} - ((l-1)T)^{u+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}\}}{u + \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \quad (9.5.4)
\end{aligned}$$

である.  $S_i(t)$  の計算は付録にて行う. したがって  $WT_1^l$  の分布関数は次式となる.

$$\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t) &= F_{S_1^l}(t) F_{E_{l-1}}((l-1)T) + F_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\
& - F_{E_{l-1}}((l-1)T) - g_l(t) \quad (9.5.5)
\end{aligned}$$

また  $WT_1^l$  の密度関数を導出する.

$$f_{WT_1^l}(t) = \frac{dF_{WT_1^l}(t)}{dt}$$

$$= f_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + f_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) - g_l'(t) \quad (9.5.6)$$

$S_1^l$  の密度関数と  $g_l'(t)$  を計算する.

$$\begin{aligned} g_l'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x)} \right. \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \frac{1}{N^l} \frac{(\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x))^{k-1}}{(k-1)!} f_{E_{l-1}}(x) dx \Big\} \end{aligned} \quad (9.5.7)$$

$k=1, k \geq 2$  で項を分け, 計算する.

$$\begin{aligned} g_l'(t) &= \sum_{j=1}^{N^l-1} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x)}}{N^l} f_{E_{l-1}}(x) dx \right\} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=2}^{j\alpha_1} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k-1}{s} \frac{(-1)^{k-1-s} (\alpha_1 \mu_1)^{k-1}}{(k-1)! N^l} \\ &\quad \frac{d}{dt} \left\{ (t+(l-1)T)^s e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{N^l-1} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{e^{\alpha_1 \mu_1 x}}{N^l} f_{E_{l-1}}(x) dx \right\} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=2}^{j\alpha_1} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k-1}{s} \frac{(-1)^{k-1-s} (\alpha_1 \mu_1)^{k-1}}{(k-1)! N^l} \\ &\quad \left[ \frac{d}{dt} \left\{ (t+(l-1)T)^s e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} \right\} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx + \right. \\ &\quad \left. (t+(l-1)T)^s e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx \right\} \right] \\ &= \frac{-\alpha_1 \mu_1 e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} (N^l - 1)}{N^l} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &\quad + \frac{N^l - 1}{N^l} f_{E_{l-1}}(t + (l-1)T) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=2}^{j\alpha_1} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k-1}{s} \frac{(-1)^{k-1-s} (\alpha_1 \mu_1)^{k-1}}{(k-1)! N^l} \times \\ &\quad [\{s(t+(l-1)T)^{s-1} - \alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)^s\} e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} \times \\ &\quad \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx \\ &\quad + (t+(l-1)T)^{k-1} f_{E_{l-1}}(t+(l-1)T)] \end{aligned} \quad (9.5.8)$$

ここで

$$\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
&\quad + e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} dx \\
&= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1} dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) dx \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \\
&\quad + \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) dx \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \\
&= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \{ (t + (l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} - ((l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} \}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)! (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1})} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) dx \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \\
&\quad + \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) dx \\
&\quad \times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \tag{9.5.9}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{E_{l-1}}(x) dx \\
&= \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k - 2 - s} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
&\quad + x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1}}(x) \\
&\quad \times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} dx \\
&= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k - 2 - s} dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(x) dx \\
& + \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_{l-1}} S_{2,k}}(x) dx \\
& \times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} dx \\
& = \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \\
& \times \frac{(t + (l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k-1-s} - ((l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k-1-s}}{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k-1-s} \\
& + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
& \times \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(x) dx \\
& + \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{k-1-s} e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_{l-1}} S_{2,k}}(x) dx \\
& \times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} dx \tag{9.5.10}
\end{aligned}$$

$S_1^l$  の密度関数を導出する.  $S_1^l$  の密度関数は

$$\begin{aligned}
f_{S_1^l}(t) &= \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=1}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1)(\alpha_1 \mu_1 t)^{k-1} e^{-\alpha_1 \mu_1 t}}{N^l(k-1)!} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N^l-1} \sum_{k=2}^{j\alpha_1} \frac{(\alpha_1 \mu_1)(\alpha_1 \mu_1 t)^{k-2} e^{-\alpha_1 \mu_1 t}}{N^l(k-2)!} \quad (0 \leq t < \infty) \tag{9.5.11}
\end{aligned}$$

## 9.6 初診患者の診察待ち時間の分布関数と密度関数の導出

$WT_2^l$  の分布関数は各事象の上で確率を計算することにより

$$\begin{aligned}
F_{WT_2^l}(t) &= \sum_{i=0}^{n_l} [F_{\max\{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}}(t) \\
&\quad \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}}] \\
&\quad + \sum_{l'=l+1}^{l+4} \sum_{i=n_{l'}+1}^{n_{l'+1}} [F_{\sum_{k=1}^{l'-1} N^{l'_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t + t_2) \\
&\quad \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l'-1} \lambda_2^{l'_1} T + \lambda_2^{l'}(t_2 - (l'-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l'-1} \lambda_2^{l'_1} T + \lambda_2^{l'}(t_2 - (l'-1)T)\}}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=n_{l+4}+1}^{\infty} [F_{\sum_{k=1}^{l+5} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t+t_2) \\
& \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}}]
\end{aligned} \quad (9.6.1)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
& F_{\max\{\sum_{k=1}^{l_1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}}(t) \\
& = \begin{cases} P(\sum_{k=1}^{l_1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t+t_2) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}
\end{aligned} \quad (9.6.2)$$

$$\begin{aligned}
& F_{\sum_{k=1}^{l'_1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t+t_2) \\
& = \frac{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 i} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 i - 1)!} \\
& \times \sum_{p=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} - 1}{p} \\
& \times (-1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} - 1 - p} \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2(t+t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 1}} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 2 - p} (-1)^s \\
& \times \left( \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 2 - p \right) P_w \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2(t+t_2), \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 1 - s)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 1 - s} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+s}} \\
& + \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1(t+t_2), p+1)}{(\alpha_1 \mu_1)^{p+1} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - p - 1}} \\
& \left. \times (-1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - p - 1} (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'_1} N^{l_1} + \alpha_2 i - p - 2)! \right\}
\end{aligned} \quad (9.6.3)$$

である。また  $WT_2^l$  の密度関数は次式となる。

$$\begin{aligned}
f_{WT_2^l}(t) & = \sum_{i=0}^{n_l} [f_{\max\{\sum_{k=1}^{l_1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}}(t) \\
& \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}}] \\
& + \sum_{l'=l+1}^{l+4} \sum_{i=n_{l'}+1}^{n_{l'+1}} [f_{\sum_{k=1}^{l'_1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t+t_2) \\
& \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}}] \\
& + \sum_{i=n_{l+4}+1}^{\infty} [f_{\sum_{k=1}^{l+5} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t+t_2)
\end{aligned}$$

$$\times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}} \quad (9.6.4)$$

ここで

$$\begin{aligned} & f_{\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}}(t) \\ &= \delta(t) F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t + t_2) + H_0(t) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t + t_2) \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

ここで

$$H_0(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (9.6.6)$$

であり、単位ステップ関数と呼ばれる。

$$\begin{aligned} & f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) = \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 i}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 i - 1)!} \\ & \times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \left\{ \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 2} e^{-\alpha_2 \mu_2 t}}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\ & + \sum_{w=1}^{s + \alpha_2 i - 1} (s + \alpha_2 i - 1 P_w) \frac{(-1)^w t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1} + \alpha_2 i - 2 - w} e^{-\alpha_2 \mu_2 t}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\ & \left. - \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'-1} N^{l_1} - 1 - s} e^{-\alpha_1 \mu_1 t} (-1)^{s + \alpha_2 i} (s + \alpha_2 i - 1)!}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s + \alpha_2 i}} \right\} \end{aligned} \quad (9.6.7)$$

である。

## 第 10 章

# 実データを用いたモデル (各枠の終了時刻までに診察可能な初診患者の人数を設定) の検証

本章では, 第 10 章で作成した診察待ち時間モデルの検証を行う. 初めに 10.1 節において, 各枠の終了時刻までに来院した初診患者の人数の上限値を設定するモデルを実際の病院の各診療科のパラメータを用いてシミュレーションを行い, 診察の空き時間を考えないシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間, 診察待ち時間の標準偏差値とヒストグラムとモデルにより算出された平均診察待ち時間, 診察待ち時間の標準偏差値と密度関数を比較し, モデルの検証をする. 次に 10.2 節において, 診察の空き時間を考えるシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間とモデルにより算出された平均診察待ち時間の比較を行い, 近似による精度を調べる. また, 10.3 節において, 実際の病院の平均診察待ち時間とモデルにより算出された平均診察待ち時間と診察待ち時間の分散値, を用いて比較をし, 検証を行う.

### 10.1 診察待ち時間モデルのシミュレーションによる検証

予約患者の待ち時間と初診患者の待ち時間の期待値を計算する際に  $\sum_{k=1}^{\sum_{l=1}^l N^l} S_{1k} + \sum_{k=1}^i S_{2k}$  の密度関数の積分と分布関数に関連した関数を計算するが, これらを計算する際に数値誤差が起こる. そのため, 数値積分を行う.  $f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l=1}^l N^l} S_{1k} + \sum_{k=1}^i S_{2k}}(t)$  を  $f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l=1}^l N^l} S_{1k}}(t)$  と  $f_{\sum_{k=1}^i S_{2k}}(t)$  を畳み込み積分することにより

$$\begin{aligned} & f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l=1}^l N^l} S_{1k} + \sum_{k=1}^i S_{2k}}(t) \\ &= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1} \sum_{l_1=1}^{N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 i} e^{-(\alpha_2 \mu_2 t)} t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{N^{l_1}} N^{l_1} + \alpha_2 i - 1}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 i - 1)!} \\ & \times \int_0^1 u^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{N^{l_1}} - 1} (1 - u)^{\alpha_2 i - 1} e^{(\alpha_2 \mu_2 - \alpha_1 \mu_1) t u} du \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

となるため, (10.1.1) 式を数値積分し,  $\sum_{k=1}^{l_1=1} N^l S_{1k} + \sum_{k=1}^i S_{2k}$  の密度関数の積分と分布関数を計算した.

#### シミュレーションにおける諸設定とパラメータの設定, 比較方法

初診患者の到着時間間隔と各患者の診察時間の長さは乱数を生成させ, 与える. 実際の病院における各医師 (医師 a, 医師 b, 医師 e, 医師 f) の診療科のパラメータを用いる. 予約患者のシミュレーションは 1000 回行い, 初診患者のシミュレーションは 3000 回行う. 各患者の平均診察待ち時間と診察待ち時間の標準偏差値を算出する.

予約患者の平均診察待ち時間は各枠に来院する予約患者の診察待ち時間の平均値を計算し, さらに 1000 回分の平均値を計算する. また初診患者の平均診察待ち時間は各枠で初めに来院した患者の診察待ち時間を取り出し, 3000 回分の平均値を取る. モデルにおける初診患者の診察待ち時間の計算は初診患者が枠の開始時刻  $(l-1)T$  に来院すると仮定した時の診察待ち時間を計算する. 図 10.9, 図 10.2 に平均診察待ち時間の比較の結果を載せ, 図 10.3, 図 10.4 に診察待ち時間の標準偏差値の比較の結果を載せる. また, 図 10.5 と図 10.6, 図 10.7 と図 10.8 にシミュレーションにより算出された診察待ち時間の相対度数分布とモデルにおける診察待ち時間の密度関数の比較を載せる. ここで初診患者の診察待ち時間の密度関数を計算する際に, 無限級数は  $i = 12$  で打ち切り計算している.

### 10.1.1 結果の考察

#### 平均診察待ち時間の比較

モデルにより算出された予約患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された予約患者の平均診察待ち時間は, ある程度同じ値を算出している. 但し後ろの枠ほどシミュレーションとモデルにおける診察待ち時間の誤差が大きくなっている. またモデルにより算出された初診患者の平均診察待ち時間と, シミュレーションにより算出された初診患者の平均診察待ち時間はシミュレーションにより算出された診察待ち時間がより大きめに算出されており, モデルにより算出された初診患者の診察待ち時間の平均値はシミュレーションにより算出された診察待ち時間より小さめに算出される傾向がある.

#### 診察待ち時間の標準偏差値の比較

モデルにより算出された各患者の診察待ち時間の標準偏差値はシミュレーションにより算出されたものと比較すると, ある程度同じ値を算出している.

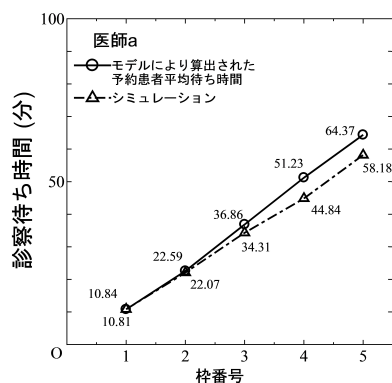
#### 相対度数分布と診察待ち時間の密度関数の比較

シミュレーションにより算出された診察待ち時間の相対度数分布とモデルにより算出された診察待ち時間の密度関数は類似した形となっている. 但し, 後ろの枠ほど, その誤差は大きくなる.

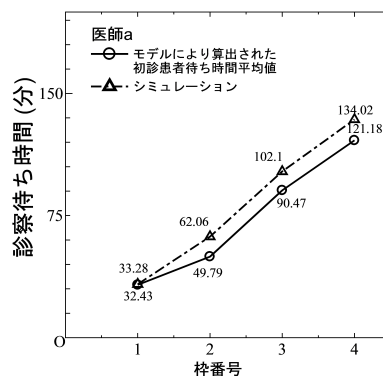
## 10.2 診察待ち時間モデルの診察の間の空き時間を考慮したシミュレーションによる検証

ここでは診察待ち時間モデルの診察の間の空き時間を考慮したシミュレーションによる検証を行う. パラメータは実際の病院における各医師 (医師 a, 医師 e) の診療科のものを用いる. 予約患者のシミュレーションは 1000 回行い, 初診患者のシミュレーションは 3000 回行う. シミュレーションにおける諸

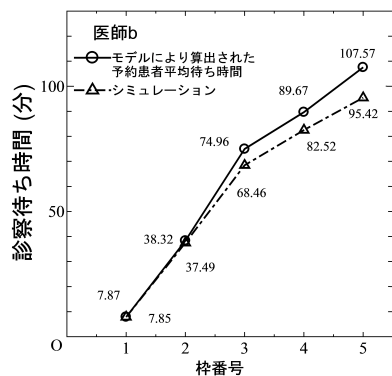




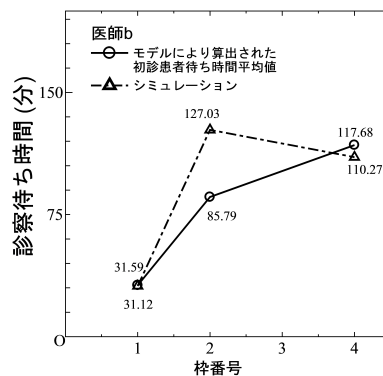
(a) 医師 a: 予約患者



(b) 医師 a: 初診患者



(c) 医師 b: 予約患者



(d) 医師 b: 初診患者

図 10.1: モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\overline{\lambda}_2 < 3$ )

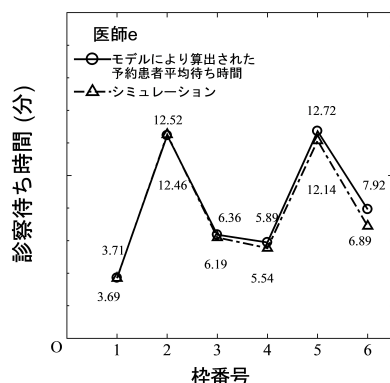
設定は 10.1 節で説明したものと同一である。

### 比較結果の考察

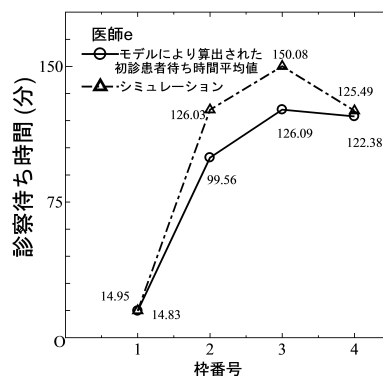
モデルにより算出された予約患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された予約患者の平均診察待ち時間は、ある程度同じ値を算出している。但し後ろの枠ほどシミュレーションとモデルにおける診察待ち時間の誤差が大きくなっている。モデルでは近似的な計算を行っているために、誤差が生まれたと思われる。またモデルにより算出された初診患者の平均診察待ち時間と、シミュレーションにより算出された初診患者の平均診察待ち時間はシミュレーションにより算出された診察待ち時間がより大きく算出されている。

## 10.3 診察待ち時間の実データを用いたモデルの検証

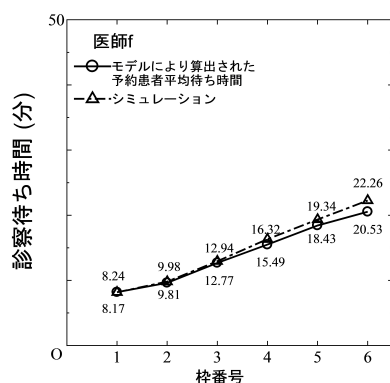
ここでは実際の病院における平均診察待ち時間とモデルにより算出された平均診察待ち時間を比較することによりモデルの検証をする。モデルにより待ち時間を算出する際のパラメータと実際の診察待ち時間の修正方法に関しては第 8 章で載せたものと同様である。但し、各枠の終了時刻までに診察出来る



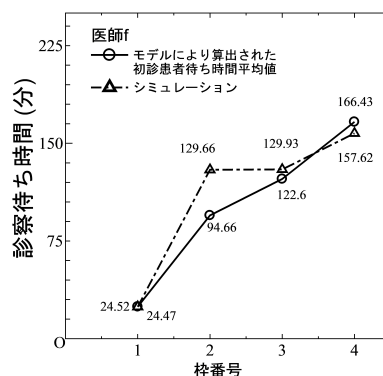
(a) 医師 e: 予約患者



(b) 医師 e: 初診患者



(c) 医師 f: 初診患者



(d) 医師 f: 初診患者

図 10.2: モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ )

初診患者の人数は次のように置いた.

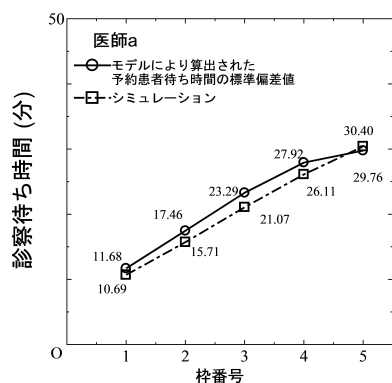
- 各枠の終了時刻までに診察出来る初診患者の人数: 1 枠 : 1 人, 2 枠 : 2 人,..., 6 枠 : 6 人

結果は到着率の平均値が小さい ( $\bar{\lambda}_2 < 2.5$ ) 時と, 大きい ( $\bar{\lambda}_2 > 3$ ) 時で分けて載せた. それぞれの結果を詳しく見る.

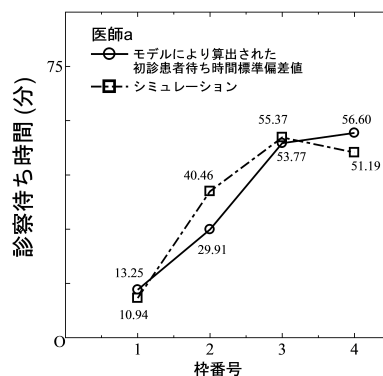
#### 医師 a, 医師 b, 医師 c における比較結果の考察

医師 a, 医師 c における平均診察待ち時間の比較結果を見ると, モデルにより算出された値は現実の平均診察待ち時間の傾向をとらえられている. 但し, モデルにより算出された予約患者の診察待ち時間の値が少し長めに算出されている. また初診患者の診察待ち時間の値は現実の平均診察待ち時間の値より少し短く算出されている. この医師においては多少の患者の入れ替えがあるものの診察時間の散らばりは小さいためにこのような結果となったと思われる.

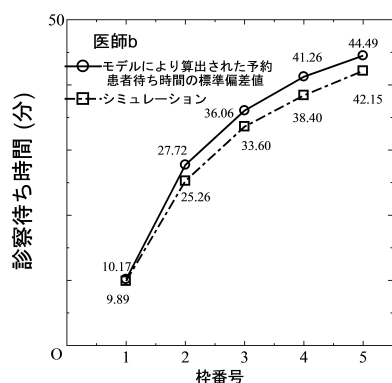
医師 b における平均診察待ち時間の比較結果を見ると, モデルにより算出された値と現実の平均診察待ち時間の値は乖離が大きく, 現実の診察待ち時間の傾向をとらえられていない. 理由としては, 次の 2 つが考えられる. 1 つ目は各患者の診察時間のばらつきが大きいために起こったと考えられる. このこ



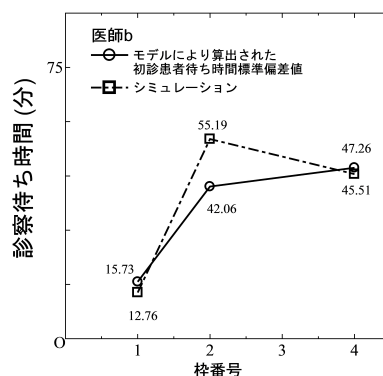
(a) 医師 a: 予約患者



(b) 医師 a: 初診患者



(c) 医師 b: 予約患者



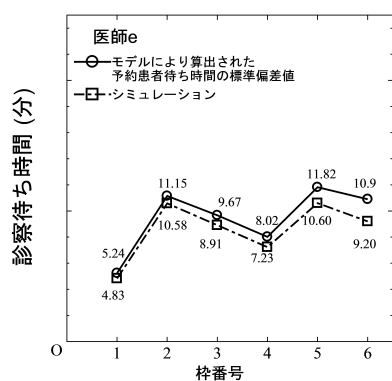
(d) 医師 b: 初診患者

図 10.3: モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の診察待ち時間の標準偏差値の比較 ( $\overline{\lambda_2} < 3$ )

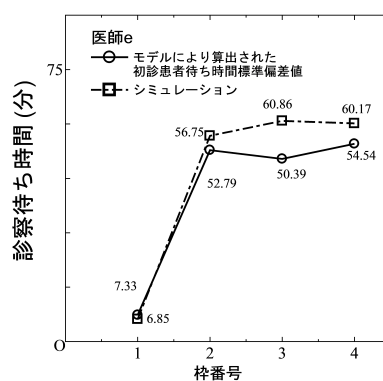
とは医師の裁量等により患者の診察順序が入れ替えられ、それを修正する時に大きな違いが出る。データにおける各患者の診察順序を入れ替える際に、われわれは各患者の平均診察時間を用いており、平均診察時間からのばらつきが大きいと平均診察時間と各患者の診察時間の差は大きくなる可能性が高い。そのために診察順序を入れ替えた際に大きな違いが出たと考えられる。2つ目は検査や問診等により、1人目の患者の診察開始時刻が遅くなっていることにありと考えられる。本モデルは診察待ち時間のみに焦点を当てたモデルであり、これらを考慮できないものとなる。

#### 医師 d, 医師 e, 医師 f における比較結果の考察

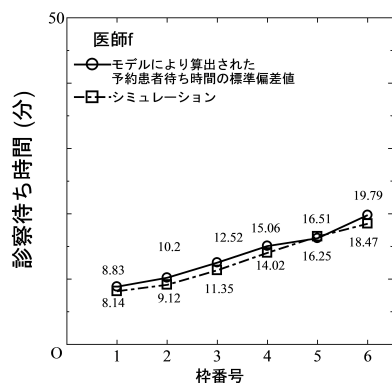
予約患者の診察待ち時間の比較結果を見ると、モデルにより算出された値は現実の平均診察待ち時間の傾向をとらえられている。また初診患者の診察待ち時間は初診患者の到着率が高いことにより、非常に長めに算出されている。医師 e, f の結果においてはモデルにより算出された値がこれを模擬出来ているが、医師 d の結果においては模擬できておらず、これはモデルにおいて  $l+5$  枠以降に診察が開始されることを考慮していないためであると考えられる。



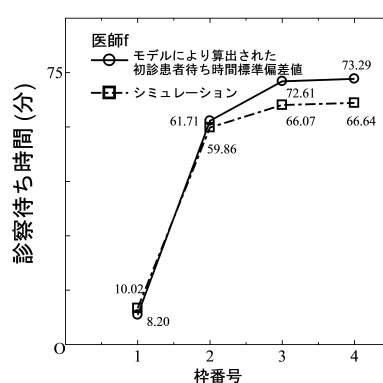
(a) 医師 e: 予約患者



(b) 医師 e: 初診患者

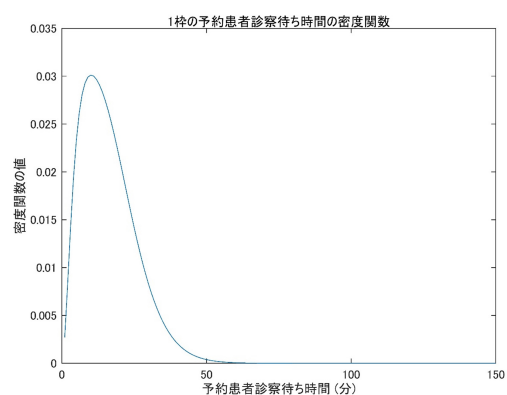


(c) 医師 f: 初診患者

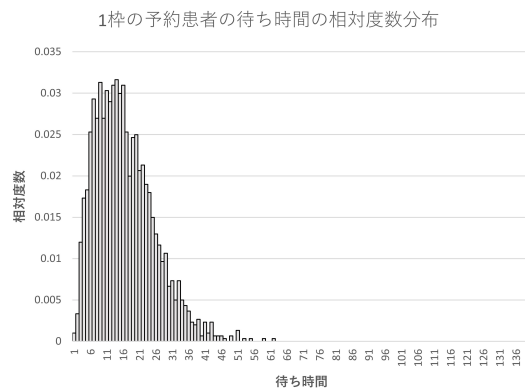


(d) 医師 f: 初診患者

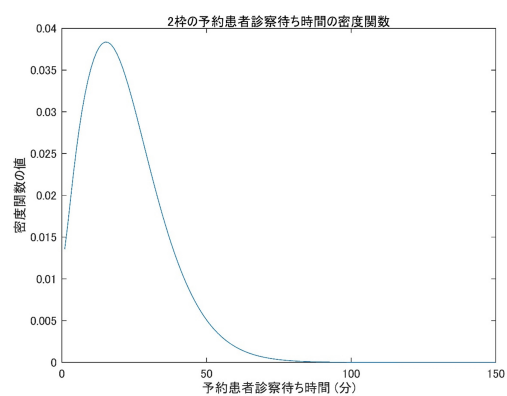
図 10.4: モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間とシミュレーションにより算出された各患者の診察待ち時間の標準偏差値の比較 ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ )



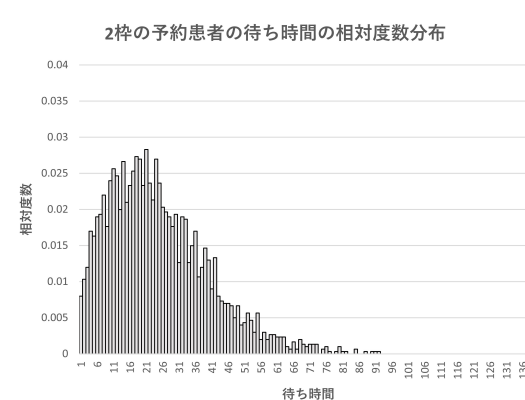
(a) 1 枠の予約患者



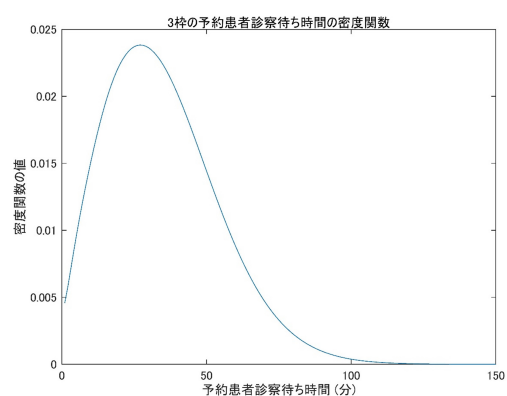
(b) 1 枠の予約患者



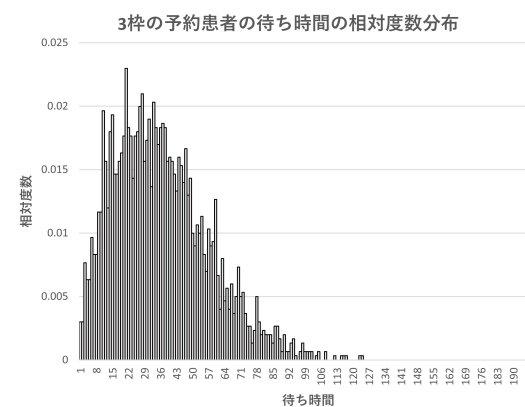
(c) 2 枠の予約患者



(d) 2 枠の予約患者

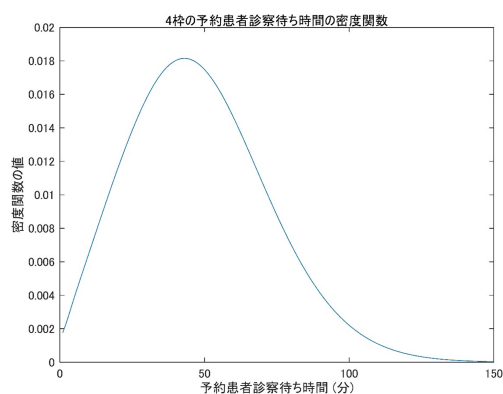


(e) 3 枠の予約患者

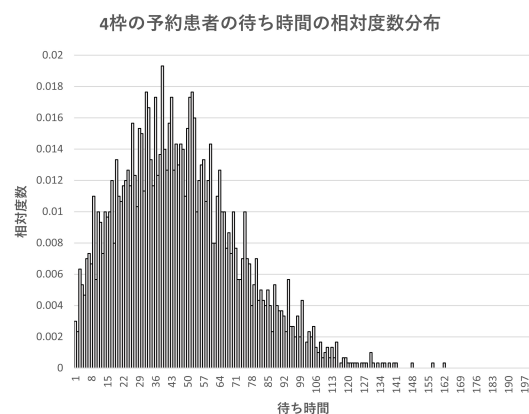


(f) 3 枠の予約患者

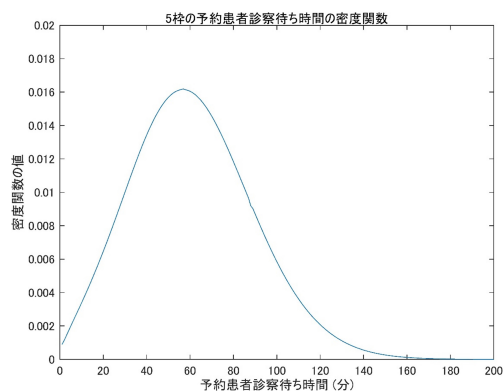
図 10.5: モデルにより算出された予約患者の診察待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された予約患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (医師 a:1 枠から 3 枠まで)



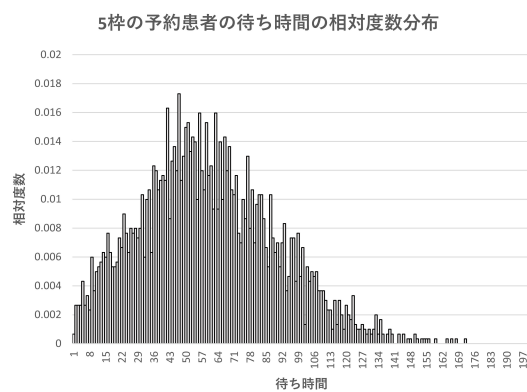
(a) 4 枠の予約患者



(b) 4 枠の予約患者

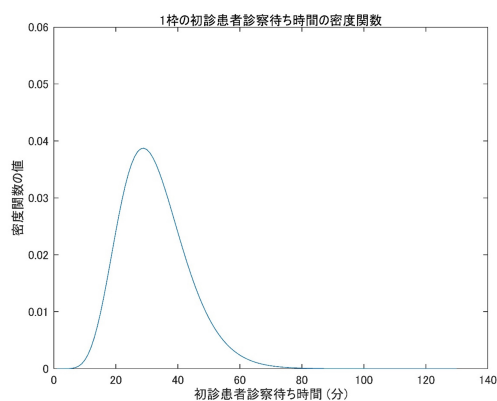


(c) 5 枠の予約患者

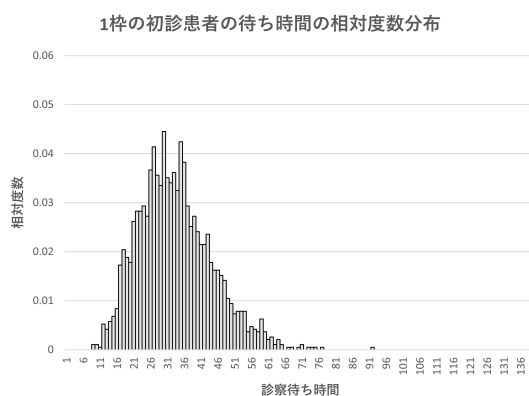


(d) 5 枠の予約患者

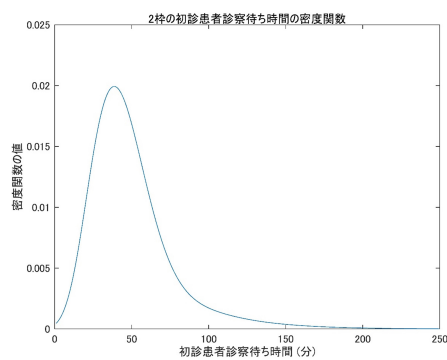
図 10.6: モデルにより算出された予約患者の診察待ち時間の待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された予約患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (医師 a:4 枠から 6 枠まで)



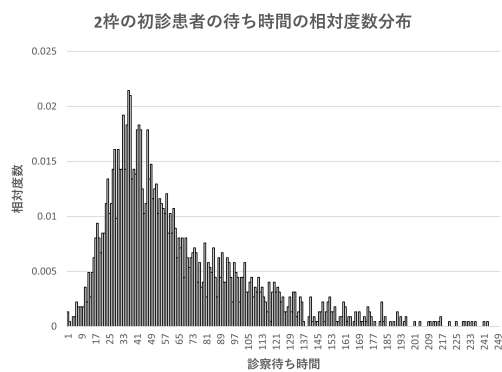
(a) 1 枠の初診患者



(b) 1 枠の初診患者

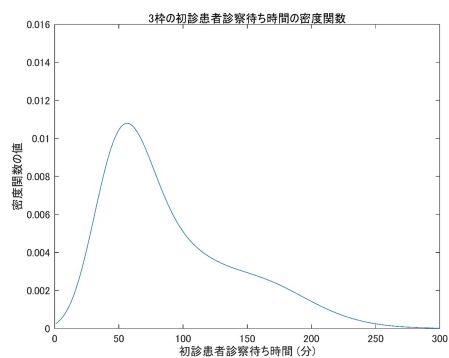


(c) 2 枠の初診患者

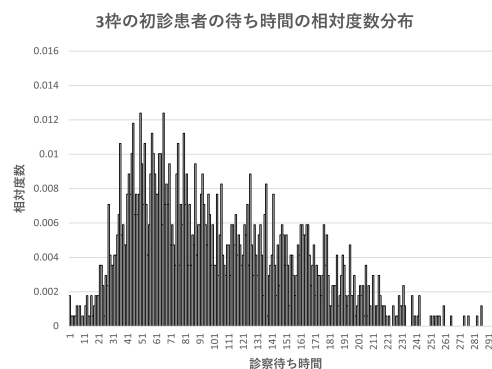


(d) 2 枠の初診患者

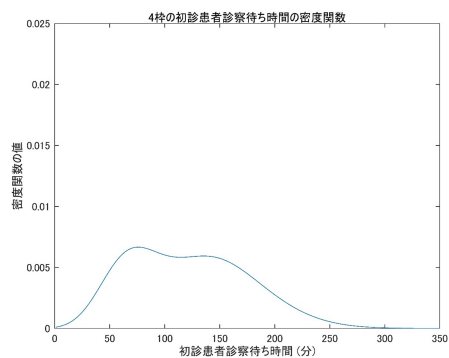
図 10.7: モデルにより算出された初診患者の診察待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された初診患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (1 枠と 2 枠)



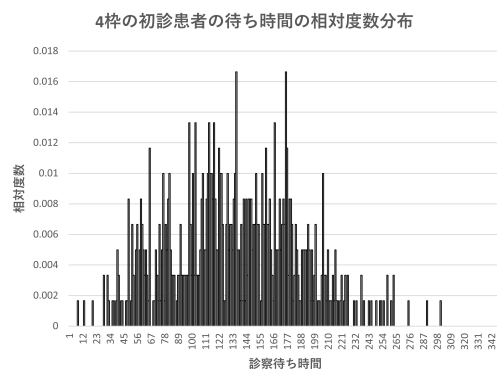
(a) 3 枠の初診患者



(b) 3 枠の初診患者



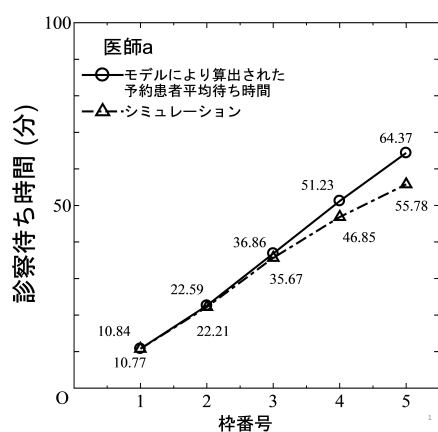
(c) 4 枠の初診患者



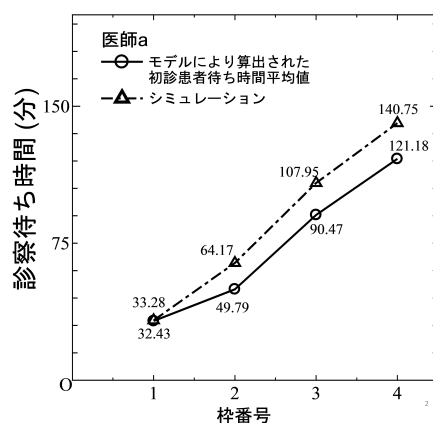
(d) 4 枠の初診患者

図 10.8: モデルにより算出された初診患者の診察待ち時間の密度関数とシミュレーションにより算出された初診患者の診察待ち時間の相対度数分布の比較 (3 枠と 4 枠)

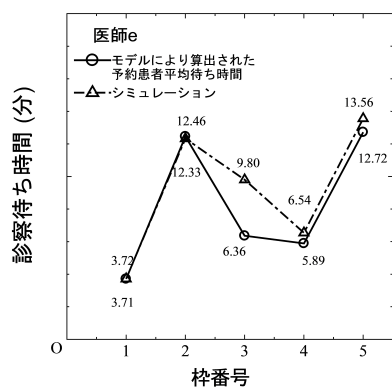




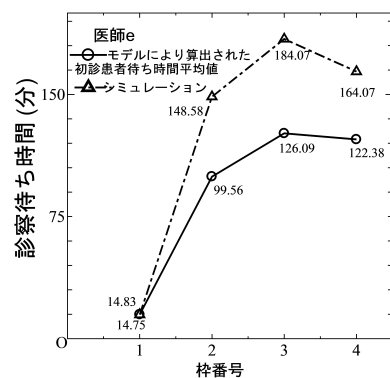
(a) 医師 a: 予約患者



(b) 医師 a: 初診患者

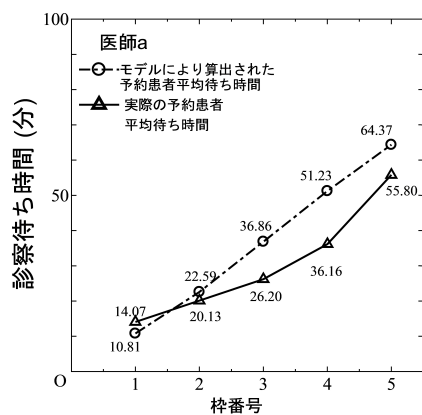


(c) 医師 b: 予約患者

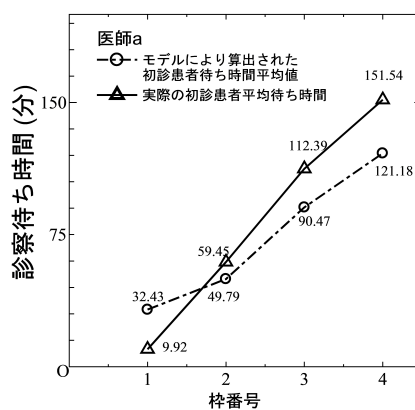


(d) 医師 b: 初診患者

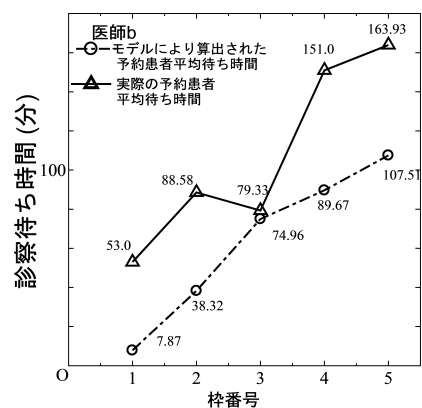
図 10.9: モデルにより算出された各患者の平均診察待ち時間と診察の間の空き時間を考慮するシミュレーションにより算出された各患者の平均診察待ち時間の比較



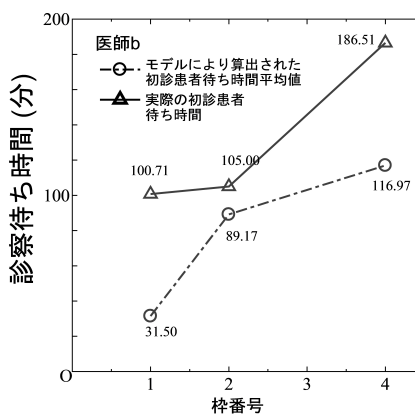
(a) 医師 a: 予約患者



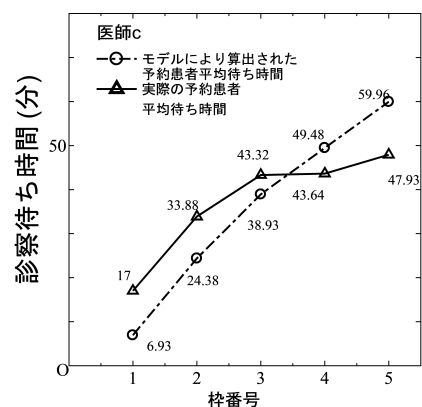
(b) 医師 a: 初診患者



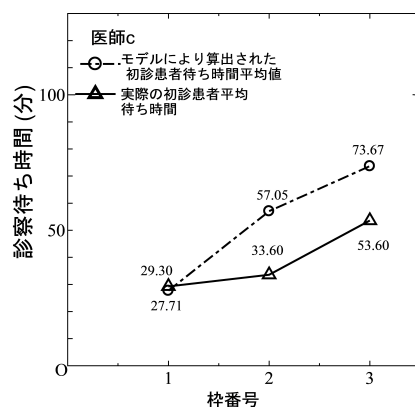
(c) 医師 b: 予約患者



(d) 医師 b: 初診患者

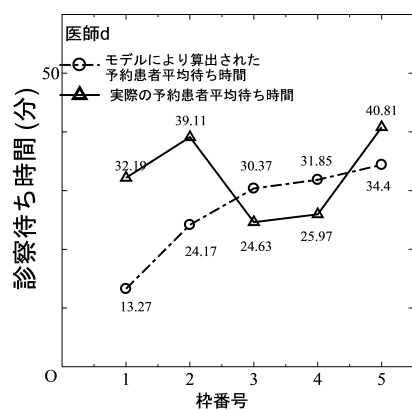


(e) 医師 c: 予約患者

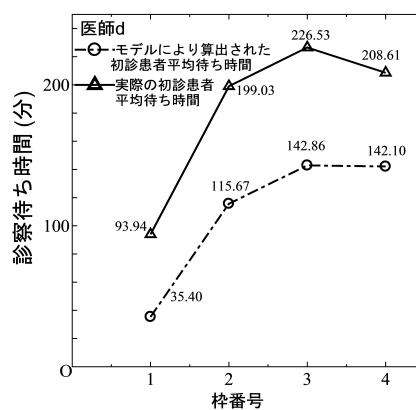


(f) 医師 c: 初診患者

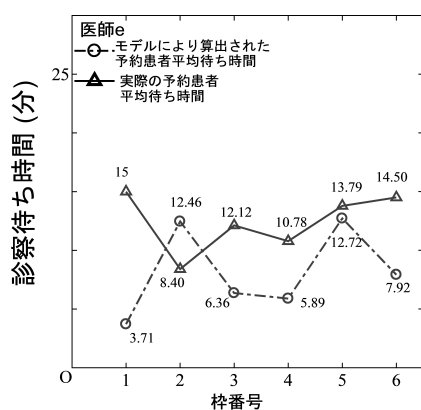
図 10.10: 各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\bar{\lambda}_2 < 3$ : アーランサービス)



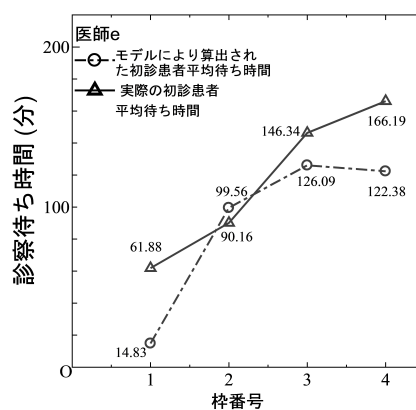
(a) 医師 d: 予約患者



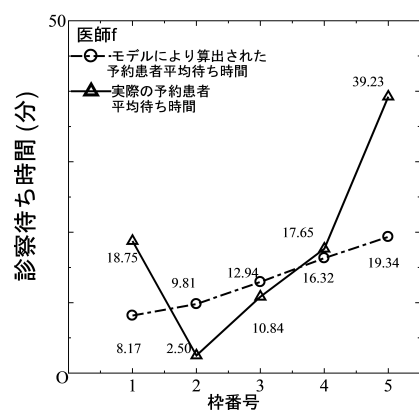
(b) 医師 d: 初診患者



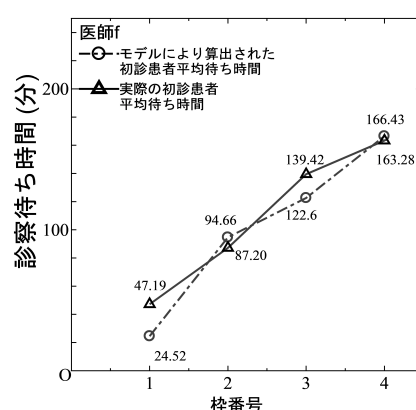
(c) 医師 e: 予約患者



(d) 医師 e: 初診患者



(e) 医師 f: 予約患者



(f) 医師 f: 初診患者

図 10.11: 各患者の平均診察待ち時間の比較 ( $\bar{\lambda}_2 > 5$ :アーランサービス)

## 第 11 章

# 結論と今後の課題

本研究では病院における診察待ち時間を定量的に解析するために、病院の外来患者の診察待ち時間の推定を行うツールの作成を行った。予約枠を時間区間として定義し、同じ予約枠の中で予約患者が優先権を持つモデルを作成した。さらに患者の診察の間の時間を省くことを行い、各枠の最後の患者の診察終了時刻を各患者の総診察時間で表わした。これにより各患者の分布関数を導出できるようになった。導出した分布関数を用いることにより、各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率をより高くできるような予約枠の時間の長さ、医師の人数、各枠の予約可能人数を設定できるようになった。各章の内容の詳細を述べる。

第 1 章で本研究における背景と目的、既存の研究、本論文の構成に関して述べた。

第 2 章で日本の病院の予約の仕組みの詳細と病院における患者の到着分布、各患者のサービス時間の長さが従う分布に関して説明し、本研究で扱う診察待ち時間モデルの記法を定義した。さらに、導出した診察待ち時間の分布関数を用いて、診察待ち時間が一定時間以内となる確率が高くなる各予約枠の人数の組み合わせや、1 つの診療科における医師の人数を示した。

第 3 章で 1 つの診療科に医師が 1 人、予約患者がレギュラー到着し、初診患者がポアソン到着、各患者の診察時間が指数分布に従う診察待ち時間モデル ( $M + D^N/M/1$ ) を作成した。また、厳密な診察待ち時間モデルに対しては各患者の診察待ち時間の分布関数を導出することが出来ないため、その理由を述べた。各患者の診察待ち時間を確率変数の関数として表わし、それらの分布関数を導出した。

第 4 章で第 3 章のモデルを医師が 2 人の場合に拡張した。本研究における 1 つの診療科に医師が 2 人存在するモデルは、医師が 1 人の待ち行列モデルを 2 つ並列させるものとして定義した。各患者の診察待ち時間は第 3 章で定義したものをベースとし、各待ち行列に対して定めた。各医師における各患者の診察待ち時間の分布関数を求めた。

第 5 章で第 3 章のモデルを医師が 3 人の場合に拡張した。1 つの診療科に医師が 3 人存在するモデルは、医師が 1 人の待ち行列モデルを 3 つ並列させるものと定義した。各患者の診察待ち時間は第 3 章で定義したものをベースとし、各待ち行列に対して定めた。各医師における各患者の診察待ち時間の分布関数を求めた。

第 6 章で第 3 章で作成したモデルを、枠毎に予約患者の予約可能人数が異なり、初診患者が枠毎に到着率が異なるポアソン到着に従い来院し、各患者の診察時間の長さがアーラン分布に従うと仮定した診察待ち時間モデル ( $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ ) に拡張した。診察待ち時間のモデルの詳細を記号を用いて説

明し、診察待ち時間を確率変数を用いて表し、各患者の診察待ち時間の分布関数を計算した。

第 7 章で第 6 章で考察したモデルを 1 つの診療科に医師が 2 人の場合に拡張し考察した。本章においても医師が 1 人の待ち行列モデルを 2 つ並列させるものとして定義し、各待ち行列モデルに対して計算を行った。各医師における各患者の診察待ち時間の分布関数の計算を行った。

第 8 章で第 7 章までに作成した診察待ち時間モデルの検証を行った。実際の病院における各診療科の診察待ち時間の平均値とモデルにより算出された平均診察待ち時間を比較し、第 3 章で作成したモデルと第 6 章で作成したモデルをそれぞれ検証した。このことより第 3 章で作成したモデルと第 6 章で作成したモデルにより算出された予約患者の診察待ち時間の値は、実際の診察待ち時間より大きく算出されており、初診患者の診察待ち時間は実際の診察待ち時間より小さく算出されていることがわかった。原因は枠の中で到着した初診患者を、全て同じ枠の中で診察しなければならないことにある。

第 9 章で第 6 章に作成した診察待ち時間モデルをベースとし、「各枠の終了可能な初診患者の人数を設定する」モデルを作成した。各患者の診察待ち時間を確率変数の関数として定め、各患者の診察待ち時間の分布関数と密度関数を求めた。

第 10 章で第 9 章に作成した診察待ち時間モデルの検証を行った。「各枠の終了時刻までに診察する初診患者の人数を制限する」モデルのシミュレーションを行い、平均診察待ち時間と標準偏差値を算出した。これらの値と第 9 章で作成した診察待ち時間モデルにより算出された平均診察待ち時間と標準偏差値を比較した。さらにシミュレーションにより算出された相対度数分布とモデルにより算出された診察待ち時間の密度関数を比較した。次に、各患者の診察の間の空き時間を考慮するシミュレーションにより算出された平均診察待ち時間とモデルにより算出された平均診察待ち時間を比較した。最後に、モデルにより算出された平均診察待ち時間と現実の病院の平均診察待ち時間のデータを比較し、検証を行った。これによりモデルにより算出された平均診察待ち時間は現実の平均診察待ち時間の傾向を捕らえられていることが分かった。

以上の結果から作成した診察待ち時間モデルの有効性を示すことが出来た。

今後は次の 2 つの的行いたい。1 つ目はモデルの精緻化である。本研究で作成したモデルは診察のみに焦点を当てているため、検査を取り入れモデル化し、より現実の状況に対応できるようにする。2 つ目はツールの作成である。導出した診察待ち時間の分布関数を用いることにより、パラメータを入力すると、診察待ち時間が 60 分以内である確率、90 分以内である確率などを自動で計算することの出来るツールを作成する予定である。このツールは診察室で各予約枠に予約可能な人数や医師の人数、予約枠の長さ等を設定する際に役に立つ。

## 謝辞

本論文を作成するに当たり多くの方々のご支援を頂きました。

大学院博士後期課程の3年半の間、ご指導を頂いた鈴木敦夫教授には心より感謝致します。研究の進め方やオペレーションズリサーチの研究の面白さ、論文の書き方、基礎的なスキル、研究者としての心がけ等の様々な事がらを、未熟な私に懇切丁寧にご指導頂きました。研究のみならず、生活に関わること、学位の申請の際には数々のご助言を頂きました。また時に厳しいお言葉掛けや優しいお言葉を頂きました。本論文を作成するに当たり、鈴木先生のご尽力なくしては完成されなかったと存じます。

三浦英俊教授には副指導教員としてご尽力頂き、本研究を発展させる数多くの有益なご助言を頂きました。また論文投稿時には論文の構成を細部まで確認して頂きました。ここに心から感謝を申し上げます。

福嶋雅夫教授、名古屋工業大学の中出康一教授には審査会を通して、論文の執筆や研究の細部に関する数多くの有益なご助言を頂きました。また佐々木美裕教授、小市俊悟准教授には OR 研究会を通して、多くの有益なご助言を頂きました。頂いたコメント全てを論文に反映させることは適いありませんでしたが、これから研究を進めるに当たり、少しでも意識して反映させていく所存です。心から感謝を申し上げます。

大石泰章教授、佐々木美裕教授にはそれぞれ大学院博士前期課程、学部生の間にご指導頂きました。ここに心から感謝を申し上げます。

ヘルスケアビジネス経営人材育成研究所所長石井富美様には実際の病院における診察待ち時間のデータを頂き、これを基に研究を進めることが出来、博士論文が完成するまでに至りました。突然のご連絡にも関わらず非常にご丁寧に対応して頂き、有難う御座いました。厚くお礼を申し上げます。

また日常生活において支えてくださった研究室の皆様、先輩、後輩には心から感謝を申し上げます。

最後に長い間勉強の機会を与えてくださった父母と姉には深く感謝致します。

## 参考文献

- [1] 「平成 29 年(2017) 患者調査の概況, 厚生労働省ホームページ」, <https://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/kanja/17/>, (2017)
- [2] 「平成 26 年受療行動調査の概況, 厚生労働省ホームページ」, <http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/jyuryo/14/>, (2014)
- [3] 「平成 20 年受療行動調査(確定数)の概況, 厚生労働省ホームページ」, <https://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/jyuryo/09/20gaikyou.html>, (2009)
- [4] 「外来患者案内システム NAVITR, 富士通ゼネラルホームページ」, <https://www.fujitsu-general.com/jp/fgot/products/hospision/navit/>
- [5] Dimakou S., Dimakou O. and Basso Henrique S. : “Waiting time distribution in public health care: empirics and theory”, *Health Economics Review*, DOI 10. 1186/s13561-015-0061-7, (2015)
- [6] 遠藤靖 : 「確率モデルの基礎:金融工学を視野に入れた確率論的考え方」. 東京電機大学出版局, pp. 91-132, (2002)
- [7] Franx G. J. : “A Simple Solution for the M/D/c Waiting Time Distribution”, *Operations Research Letters*, Vol. 29, No.5, pp. 221-229, (2001)
- [8] 本間 鶴千代 : 「待ち行列の理論」, 理工学社, (1966)
- [9] 石井富美, 岩崎正信, 古屋修身 : “医療情報システムを利用した外来診療待ち時間調査がもたらした患者満足度向上への取り組み”, 医療情報学連合大会論文集 (医療情報連合大会論文集), pp. 678-681, (2009)
- [10] Ichihara H., Suzuki A., Miura H. : “On the Distribution of Waiting Time of Outpatients in a Hospital”, proceedings of the 13th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2018), pp. 64-68, (2018)
- [11] 紀永儒, 柳川佳也, 宮崎茂次 : “待ち行列理論を用いた病院の外来患者待ち時間短縮の一提案”, 日本経営工学会論文誌, Vol. 60, No.6, pp. 297-305, (2010)
- [12] Kuczura A. : “Piecewise Markov Processes” , *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 24, No.2, pp. 169-181, (1973)
- [13] Kuczura A. : “Queues With Mixed Renewal and Poisson Inputs” , *The Bell System Technical Journal*, Vol. 51, No.6, pp. 1305-1326, (1972)
- [14] 木佐 健悟, 川畑 秀伸, 前沢 政次 : “日本国内の診察時間研究の現状—システムティックレビュー

- ー”, 日本プライマリ・ケア連合学会誌, Vol. 35, No.1, pp.37-44, (2012)
- [15] Lakshmi C., Sivakumar A. I. : “Application of queuing theory in health care: A literature review,” in *Operations Research for Health Care* 2, pp 25-39, (2013)
- [16] 松田 光生, 本田 勝紀, 内田 勝也, 樫田 良精 : “東大病院における外来患者の待時間の問題について”, 医用電子と生体工学, Vol. 5, No. 2, pp. 139-142, (1967)
- [17] Medhi J. : “Waiting time distribution in a Poisson Queue with a General Bulk Service Rule”, in *Management Science*, Vol. 21, No. 7, pp. 777-782, (1975)
- [18] 三井 貞代, 柳原 きよ江, 丸山 ひさみ, 楊箸 隆哉 : “外来患者の待ち時間に関する実態調査”, 信州大学医学部付属病院看護研究集録, Vol. 29, No. 1, pp.57-64, (2000)
- [19] 森川克巳, 高橋勝彦, 広谷大助 : “外来患者の平均待ち時間を考慮した診察順序決定”, 日本経営工学会論文誌, Vol. 64, No. 2, pp. 119-127, (2012)
- [20] 小川 明宏, 真木 一成, 江角 宣行, 朝原 春海, 河内 清次, 武内 保憲 : “病院用待ち時間予測システムの開発”, 電気学会論文誌, Vol. 129, No. 7, pp. 1264-1268, (2009)
- [21] Olorunsola S. A., Adeleke R. A. and Ogunlade T. O. : “Queueing Analysis of Patient Flow in Hospital”, in *International Organization of Scientific Research Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, Vol. 10, No. 4, pp. 47-53, (2014)
- [22] 大前 浩司, 小林 春香, 内村 裕之, 脇 嘉代, 新 秀直, 田中 勝弥, 藤田 英雄, 大江 和彦 : “携帯情報端末を用いた外来患者案内システムの開発と実証”, 医療情報学, Vol.34, No.2, pp. 55-64, (2014)
- [23] 尾崎俊治 : 「確率モデル入門」, 朝倉書店, (1996)
- [24] Joustra P., van der Sluis E., van Dijk N. M. : “To pool or not to pool in hospitals: a theoretical and practical comparison for a radiotherapy outpatient department”, *Annals of Operations Research*, Vol. 178, No. 1, pp. 78-89, (2010)
- [25] Takagi H., Kanai Y., Misue K.: “Queueing network model for obstetric patient flow in a hospital,” in *Health Care Management Science* 2, pp. 433-451, (2017)
- [26] 徳永誠, 渡邊進, 中根惟武 : “待ち時間と満足度を組み合わせた外来患者調査”, 日本医療マネジメント学会雑誌, Vol. 7, No.2, pp. 324-328, (2006)
- [27] 徳永誠, 中根惟武 : “外来患者の受診状況ごとに検討した待ち時間調査”, 日本医療マネジメント学会雑誌, Vol. 7, No.3, pp. 434-437 , (2006)
- [28] 富木裕一, 金井美紀, 檀原高, 田中逸, 伊藤澄信, 佐藤邦義, 西村ふみ子, 吉田 美智子, 伊藤タカ, 米澤和彦, 中根惟武, 稲葉忠敬, 岡本正利, 山城雄一郎 : “外来待ち時間調査 2002 ”, 患者サービス向上委員会 ー外来待ち時間対策ワーキンググループー, Vol 49. No.1, pp.102-107,(2003)



## 付録 A

# 各種計算, 証明

### A.1 積分の証明

第3章の  $E_l$  の分布関数の導出の過程で必要になる積分の計算の証明を載せる.

ここで (3.3.11) 式を数学的帰納法により証明する.

$$\int_0^t v^n e^v dv = t^n e^t + \sum_{w=1}^n (-1)^w ({}_nP_w) t^{n-w} e^t + (-1)^{n+1} n! \quad (\text{A.1.1})$$

$n = 1$  の時:

$$\int_0^t v e^v dv = [v e^v]_{v=0}^{v=t} - \int_0^t e^v dv = t e^t - e^t + 1 \quad (\text{A.1.2})$$

となるため, 式 (A.1.1) が成立する.

$n = k + 1$  の時:

$n = k$  の時 (A.1.1) 式が成立すると仮定する.

$$\int_0^t v^{k+1} e^v dv = [v^{k+1} e^v]_{v=0}^{v=t} - \int_0^t (k+1) v^k e^v dv = t^{k+1} e^t - (k+1) \int_0^t v^k e^v dv \quad (\text{A.1.3})$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^t v^{k+1} e^v dv &= t^{k+1} e^t - ((k+1) t^k e^t + \sum_{w=1}^k (-1)^w (k+1) ({}_kP_w) t^{k-w} e^t \\ &\quad + (-1)^{k+1} (k+1)!) \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

となり,  $(k+1)({}_kP_w) = {}_{k+1}P_{w+1}$  であるために, 式 (A.1.4) をまとめると

$$\begin{aligned} \int_0^t v^{k+1} e^v dv &= t^{k+1} e^t + (-1)({}_{k+1}P_1) t^{k+1-(0+1)} e^t \\ &\quad + \sum_{w=1}^k (-1)^{w+1} ({}_{k+1}P_{w+1}) t^{k+1-(w+1)} e^t + (-1)^{k+2} (k+1)! \\ &= t^{k+1} e^t + \sum_{w=1}^{k+1} (-1)^w ({}_{k+1}P_w) t^{k+1-w} e^t + (-1)^{k+2} (k+1)! \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

となる. したがって式 (A.1.1) が成立する. このことより数学的帰納法により全ての  $n$  に対して式 (A.1.1) が成立する事が証明された.

## A.2 $M + D^N/M/1$ モデルにおける $s(t; k)$ の計算

第 3 章の  $s(t; k)$  の計算を行う.  $(\mu_1(t-x))^n$  を 2 項展開しまとめる.

$$\begin{aligned}
 s(t; k) &= \int_a^t (\mu_1(t-x))^n x^k e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx \\
 &= \mu_1^n \sum_{s=0}^n t^{n-s} (-1)^s \int_a^t x^{s+k} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx \\
 &= \mu_1^n \sum_{s=0}^n t^{n-s} (-1)^s \left\{ \int_0^t x^{s+k} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx - \int_0^a x^{s+k} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx \right\}
 \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

ここで  $\int_0^a x^{s+k} e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx$  に値を代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 s(t; k) &= \int_a^t (\mu_1(t-x))^n x^k e^{(\mu_1-\mu_2)x} dx = \mu_1^n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} t^{n-s} (-1)^s \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^{s+k+1}} \\
 &\quad \times \left[ ((\mu_1 - \mu_2)t)^{s+k} e^{(\mu_1-\mu_2)t} + \sum_{w=1}^{s+k} (-1)^w (s+k P_w) ((\mu_1 - \mu_2)t)^{s+k-w} e^{(\mu_1-\mu_2)t} - \right. \\
 &\quad \left. ((\mu_1 - \mu_2)a)^{s+k} e^{(\mu_1-\mu_2)a} - \sum_{w=1}^{s+k} (-1)^w (s+k P_w) ((\mu_1 - \mu_2)a)^{s+k-w} e^{(\mu_1-\mu_2)a} \right]
 \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

## A.3 $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ モデルにおける $s(t; n)$ の計算

第 6 章の  $s(t; k)$  の計算を行う. (A.2.2) 式の  $\mu_i$  を  $\alpha_i \mu_i$  と置くことにより次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 s(t; n) &= (\alpha_1 \mu_1)^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} \binom{i-1}{s} t^{i-1-s} (-1)^s \frac{1}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s+n+1}} \\
 &\quad \times \left[ ((\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)t)^{s+n} e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)t} \right. \\
 &\quad + \sum_{w=1}^{s+n} (-1)^w (s+n P_w) ((\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)t)^{s+n-w} e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)t} \\
 &\quad - ((\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(l-1)T)^{s+n} e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(l-1)T} \\
 &\quad \left. - \sum_{w=1}^{s+n} (-1)^w (s+n P_w) ((\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(l-1)T)^{s+n-w} e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(l-1)T} \right]
 \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

#### A.4 $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ モデル (各枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数を設定) における $S_i(t)$ の計算

第 9 章の  $S_i(t)$  の計算を行う.

$$\begin{aligned}
 S_i(t) &= \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x)} \\
 &\quad \times (\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T-x))^{k-1} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(x) dx \\
 &= e^{-\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T)} \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_1 \mu_1 (t+(l-1)T))^{k-1-i} \\
 &\quad \times (-1)^i \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^i e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(x) dx
 \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

ここで積分は次式となる.

$$\begin{aligned}
 &\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^i e^{\alpha_1 \mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(x) dx \\
 &= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 n_l}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 n_l - 1)!} \\
 &\quad \times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{s} \\
 &\quad \times (-1)^s \left[ \frac{\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{i+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 n_l - 2} e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)x} dx}{\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2} \right. \\
 &\quad + \sum_{w=1}^{s+\alpha_2 n_l - 1} (s+\alpha_2 n_l - 1) P_w) \\
 &\quad \times \frac{(-1)^w \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{i+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 n_l - 2 - w} e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)x} dx}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
 &\quad - \frac{\{(t+(l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - s + i} - ((l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - s + i}\}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s+\alpha_2 n_l}} \\
 &\quad \left. \times \frac{(-1)^{s+\alpha_2 n_l} (s+\alpha_2 n_l - 1)!}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - s + i)} \right]
 \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 &\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)x} dx \\
 &= \int_0^{t+(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)x} dx - \int_0^{(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)x} dx
 \end{aligned} \tag{A.4.3}$$

である. さらに

a)  $\alpha_1\mu_1 \neq \alpha_2\mu_2$

$$\begin{aligned} \int_0^t x^n e^{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)x} dx &= \frac{t^n e^{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)t}}{\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2} + \sum_{w=1}^n (-1)^w ({}_nP_w) \frac{t^n e^{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)t}}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1} n!}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

b)  $\alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$

$$\int_0^t x^n dx = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \quad (\text{A.4.5})$$

となる.

## 付録 B

# 各モデルにおける予約患者待ち時間, 初診患者待ち時間の期待値と分散値の計算

### B.1 予約患者待ち時間の期待値の計算

$WT_1^l$  ( $l \in L$ ) は全てのモデルにおいて

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (\text{B.1.1})$$

となる.

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l] \\ &= E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}] - (l-1)T + E[S_1^l] \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

ここで  $\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}$  は  $E_{l-1} \geq (l-1)T$  の時に  $E_{l-1}$  となり,  $E_{l-1} \leq (l-1)T$  の時  $(l-1)T$  となるため

$$E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}] = E[E_{l-1}; \{E_{l-1} \geq (l-1)T\}] + E[(l-1)T; \{E_{l-1} \leq (l-1)T\}] \quad (\text{B.1.3})$$

となる.  $E[X; A]$  は確率変数  $X$  を事象  $A$  に制限したときの期待値を意味する [6]. (B.1.3) 式の右辺の第 1 項は広義積分を避けるため

$$E[E_{l-1}] = E[E_{l-1}; \{E_{l-1} \geq (l-1)T\}] + E[E_{l-1}; \{E_{l-1} \leq (l-1)T\}] \quad (\text{B.1.4})$$

とする.

$$E[E_{l-1}; \{E_{l-1} \leq (l-1)T\}] = \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \quad (\text{B.1.5})$$

であるため,

$$E[E_{l-1}; \{E_{l-1} \geq (l-1)T\}] = E[E_{l-1}] - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \quad (\text{B.1.6})$$

となり,

$$E[(l-1)T; \{E_{l-1} \leq (l-1)T\}] = (l-1)T F_{E_{l-1}}((l-1)T) \quad (\text{B.1.7})$$

であるため,

$$E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}] = E[E_{l-1}] - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt + (l-1)TF_{E_{l-1}}((l-1)T) \quad (\text{B.1.8})$$

となる. したがって  $WT_1^l$  ( $l \in L$ ) の期待値は

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= E[E_{l-1}] - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)TF_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + E[S_1^l] \end{aligned} \quad (\text{B.1.9})$$

となる.  $E_{l-1}$  と  $S_1^l$  の期待値がモデルにより異なるため, これらを各モデルで計算する.

## B.2 予約患者待ち時間の分散値の計算

予約患者の待ち時間の分散値を計算する.

$$V[WT_1^l] = V[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}] + V[S_1^l] \quad (\text{B.2.1})$$

はじめに

$$V[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}] = E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}^2] - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 \quad (\text{B.2.2})$$

となる.  $\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}$  の 2 次モーメントは事象を  $\{E_{l-1} \geq (l-1)T\}$  と  $\{E_{l-1} \leq (l-1)T\}$  の時に分割することにより

$$E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}^2] = E[E_{l-1}^2; E_{l-1} \geq (l-1)T] + E[(l-1)T^2; E_{l-1} \leq (l-1)T] \quad (\text{B.2.3})$$

となる. また (B.2.3) 式の右辺の第一項は

$$E[E_{l-1}^2] = E[E_{l-1}^2; E_{l-1} \geq (l-1)T] + E[E_{l-1}^2; E_{l-1} \leq (l-1)T] \quad (\text{B.2.4})$$

とする.

$$E[E_{l-1}^2; \{E_{l-1} \leq (l-1)T\}] = \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \quad (\text{B.2.5})$$

であるため,

$$E[E_{l-1}^2; E_{l-1} \geq (l-1)T] = E[E_{l-1}^2] - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \quad (\text{B.2.6})$$

となる.

$$E[(l-1)T^2; E_{l-1} \leq (l-1)T] = ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) \quad (\text{B.2.7})$$

となるため

$$E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}^2] = E[E_{l-1}^2]$$

$$- \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt + ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) \quad (\text{B.2.8})$$

と表すことが出来る。したがって  $WT_1^l$  の分散値は

$$\begin{aligned} V[WT_1^l] &= E[E_{l-1}^2] - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 + V[S_1^l] \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

となる。  $E_{l-1}$  の 2 次モーメントと  $S_1^l$  の分散値を各モデルで計算する。

### B.3 初診患者待ち時間の期待値の計算

$WT_2^l$  ( $l \in L$ ) は

$$WT_2^l = \max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\} \quad (\text{B.3.1})$$

と表すことができる。

$WT_2^l$  の期待値を計算する。

$$E[WT_2^l] = E[\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\}] \quad (\text{B.3.2})$$

$$\begin{aligned} E[\max\{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}] &= E[E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}; E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \geq t_2] \\ &\quad + E[t_2; E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

(B.3.3) 式の右辺の第 1 項は広義積分を避けるために次の関係式を利用し計算する。

$$\begin{aligned} E[E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}] &= E[E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}; E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \geq t_2] \\ &\quad + E[E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}; E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \end{aligned} \quad (\text{B.3.4})$$

ここで

$$\begin{aligned} &E[E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}; E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \\ &= \int_0^{t_2} x f_{E_l' + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

である。また

$$E[t_2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] = t_2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) \quad (\text{B.3.6})$$

となるため, (B.3.6) 式と (B.3.5) 式を (B.3.3) 式に代入すると

$$\begin{aligned} E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}] &= E[E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}] \\ &\quad - \int_0^{t_2} x f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(x) dx + t_2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) \end{aligned} \quad (\text{B.3.7})$$

となる。最後に (B.3.7) 式を (B.3.2) 式に代入すると  $WT_2^l$  の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[WT_2^l] &= E[E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}] - \int_0^{t_2} x f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(x) dx \\ &\quad + t_2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) - t_2 \end{aligned} \quad (\text{B.3.8})$$

したがって  $E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の期待値を各モデルで計算する。

## B.4 初診患者待ち時間の分散値の計算

$WT_2^l$  の分散値を計算する。

$$V[WT_2^l] = V[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}] \quad (\text{B.4.1})$$

$$\begin{aligned} V[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}] &= E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}^2] \\ &\quad - E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4.2})$$

事象を制限することにより

$$\begin{aligned} &E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}^2] \\ &= E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \geq t_2] \\ &\quad + E[t_2^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \end{aligned} \quad (\text{B.4.3})$$



となる。ここで

$$\begin{aligned} E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \geq t_2] &= E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2] \\ &- E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \end{aligned} \quad (\text{B.4.4})$$

となる。また

$$\begin{aligned} E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \\ = \int_0^{t_2} t^2 f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) dt \end{aligned} \quad (\text{B.4.5})$$

であるために、 $\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}$  の 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}^2] \\ = E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2] - \int_0^{t_2} t^2 f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) dt \\ + E[t_2^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] \end{aligned} \quad (\text{B.4.6})$$

となる。ここで

$$E[t_2^2; E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} \leq t_2] = t_2^2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) \quad (\text{B.4.7})$$

である。したがって  $WT_2^l$  の分散値は

$$\begin{aligned} V[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}] \\ = E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2] - \int_0^{t_2} t^2 f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) dt \\ + t_2^2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) - E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4.8})$$

となる。 $E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の 2 次モーメントを各モデルで計算する。

## 付録 C

# $M + D^N/M/1$ における各患者の待ち時間の期待値と分散値の計算

### C.1 予約患者の待ち時間の期待値の計算

$E_{l-1}$  の期待値は

$$\begin{aligned} E[E_{l-1}] &= E\left[\sum_{k=1}^{(l-1)N} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{N_2((l-1)T)} S_{2,k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{(l-1)N} E[S_{1,k}] + E\left[\sum_{k=1}^{N_2((l-1)T)} S_{2,k}\right] = \frac{(l-1)N}{\mu_1} + \frac{\lambda_2(l-1)T}{\mu_2} \end{aligned} \quad (C.1.1)$$

となる. (C.1.1) 式を (B.1.9) 式に代入することにより,  $WT_1^l$  の期待値は

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= \frac{(l-1)N}{\mu_1} + \frac{\lambda_2(l-1)T}{\mu_2} - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)TF_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1}(N-1) \end{aligned} \quad (C.1.2)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} &\int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &= \frac{e^{-\lambda_2(l-1)T} \mu_1^{(l-1)N}}{((l-1)N-1)!} \left[ \frac{\gamma((l-1)N+1, (l-1)\mu_1 T)}{\mu_1^{(l-1)N+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2(l-1)T)^k}{k!(k-1)!} \right. \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{(l-1)N-1} \binom{(l-1)N-1}{p} (-1)^{(l-1)N-1-p} \left\{ \frac{\gamma((l-1)N+k, (l-1)\mu_2 T)}{\mu_2^{(l-1)N+k} (\mu_1 - \mu_2)} \right. \\ &\quad + \sum_{w=1}^{(l-1)N+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w ((l-1)N+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \right) \\ &\quad \times \left. \frac{\gamma((l-1)N+k-w, (l-1)\mu_2 T)}{\mu_2^{(l-1)N+k-w}} \right\} + \left. \frac{(-1)^{(l-1)N+k-p-1} ((l-1)N+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N+k-p-1}} \right] \end{aligned} \quad (C.1.3)$$

$$\times \frac{\gamma(p+2, (l-1)\mu_1 T)}{\mu_1^{p+2}}) \}} \quad (\text{C.1.4})$$

である. また  $F_{E_{l-1}}(t)$  は (3.3.14) 式となる.

## C.2 予約患者の待ち時間の分散値の計算

$E_l$  の 2 次モーメントを計算する.  $E_l$  の積率母関数は

$$E[\exp(E_l s)] = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{lN} \exp(-\lambda_2 l T + \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{\mu_2 - s}) \quad (\text{C.2.1})$$

であるため, 2 階微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E[\exp(E_l s)]}{ds^2} &= \frac{lN(lN+1)\mu_1^{lN}}{(\mu_1 - s)^{lN+2}} \exp(-\lambda_2 l T + \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{\mu_2 - s}) \\ &+ \frac{lN\mu_1^{lN}}{(\mu_1 - s)^{lN+1}} \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{(\mu_2 - s)^2} \exp(-\lambda_2 l T + \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{\mu_2 - s}) \\ &+ \frac{lN\mu_1^{lN}}{(\mu_1 - s)^{lN+1}} \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{(\mu_2 - s)^2} \exp(-\lambda_2 l T + \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{\mu_2 - s}) \\ &+ \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{lN} \left(\frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{(\mu_2 - s)^2}\right)^2 \exp(-\lambda_2 l T + \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{\mu_2 - s}) \\ &+ \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{lN} \frac{2\mu_2 \lambda_2 l T}{(\mu_2 - s)^3} \exp(-\lambda_2 l T + \frac{\mu_2 \lambda_2 l T}{\mu_2 - s}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

したがって  $E_l$  の 2 次モーメントは

$$E[E_l^2] = \frac{d^2 E[\exp(E_l s)]}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{lN(lN+1)}{(\mu_1)^2} + \frac{2\lambda_2 l^2 T N}{\mu_1 \mu_2} + \left(\frac{\lambda_2 l T}{\mu_2}\right)^2 + \frac{2\lambda_2 l T}{\mu_2^2} \quad (\text{C.2.3})$$

となる.

$$V[S_1^l] = E[(S_1^l)^2] - E[S_1^l]^2 \quad (\text{C.2.4})$$

$S_1^l$  の積率母関数は

$$\begin{aligned} E[\exp(s S_1^l)] &= \sum_{j=1}^N \prod_{k=0}^{j-1} E[\exp(s S_{1,k}) | \{C_1^{l*} \text{ が } j \text{ 番目に診察を受ける}\}] P(\{C_1^{l*} \text{ が } j \text{ 番目に診察を受ける}\}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{j-1} \end{aligned} \quad (\text{C.2.5})$$

となる. (C.2.5) 式を 2 階微分すると

$$\frac{d^2 M_{S_1^l}(s)}{ds^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N j(j-1) \frac{\mu_1^{j-1}}{(\mu_1 - s)^{j+1}}$$

となるため,  $S_1^l$  の 2 次モーメントは

$$E[S_1^{l^2}] = \frac{1}{3\mu_1^2}(N^2 - 1) \quad (\text{C.2.6})$$

となる. したがって  $S_1^l$  の分散値は

$$V[S_1^l] = \frac{N^2}{12\mu_1^2} + \frac{6N}{12\mu_1^2} - \frac{7}{12\mu_1^2} \quad (\text{C.2.7})$$

となる. これより  $WT_1^l$  の分散値は

$$\begin{aligned} V[WT_1^l] &= \frac{lN(lN+1)}{(\mu_1)^2} + \frac{2\lambda_2 l^2 TN}{\mu_1 \mu_2} + \left(\frac{\lambda_2 l T}{\mu_2}\right)^2 + \frac{2\lambda_2 l T}{\mu_2^2} \\ &\quad - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt + ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\ &\quad - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 + \frac{N^2}{12\mu_1^2} + \frac{6N}{12\mu_1^2} - \frac{7}{12\mu_1^2} \end{aligned} \quad (\text{C.2.8})$$

である. ここで

$$\begin{aligned} &\int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &= \frac{e^{-\lambda_2(l-1)T} \mu_1^{(l-1)N}}{((l-1)N-1)!} \left[ \frac{\gamma((l-1)N+2, (l-1)\mu_1 T)}{\mu_1^{(l-1)N+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 (l-1)T)^k}{k!(k-1)!} \right. \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{(l-1)N-1} \binom{(l-1)N-1}{p} (-1)^{(l-1)N-1-p} \left\{ \frac{\gamma((l-1)N+k+1, (l-1)\mu_2 T)}{\mu_2^{(l-1)N+k+1} (\mu_1 - \mu_2)} \right. \\ &\quad + \sum_{w=1}^{(l-1)N+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w ((l-1)N+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \right. \\ &\quad \times \frac{\gamma((l-1)N+k-w+1, (l-1)\mu_2 T)}{\mu_2^{(l-1)N+k-w+1}} \left. \right) + \left( \frac{(-1)^{(l-1)N+k-p-1} ((l-1)N+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{(l-1)N+k-p-1}} \right. \\ &\quad \times \left. \left. \frac{\gamma(p+3, (l-1)\mu_1 T)}{\mu_1^{p+3}} \right) \right\} \left. \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.10})$$

である. また  $F_{E_{l-1}}(t)$  は (3.3.14) 式となる.

### C.3 初診患者の待ち時間の期待値の計算

$E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の期待値は

$$E[E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}] = \frac{lN}{\mu_1} + \frac{\lambda_2 t_2}{\mu_2} \quad (\text{C.3.1})$$

となる. (C.3.1) 式を (B.3.8) 式に代入すると  $WT_2^l$  の期待値は次のようになる.

$$E[WT_2^l] = \frac{lN}{\mu_1} + \frac{\lambda_2 t_2}{\mu_2} - \int_0^{t_2} x f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(x) dx$$

$$+ t_2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) - t_2 \quad (\text{C.3.2})$$

ここで

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} x f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(x) dx \\ &= \frac{e^{-\lambda_2 t_2} \mu_1^{lN}}{(lN-1)!} \left[ \frac{\gamma(lN+1, \mu_1 t_2)}{\mu_1^{lN+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \right. \\ & \times (-1)^{lN-1-p} \left\{ \frac{\gamma(lN+k, \mu_2 t_2)}{\mu_2^{lN+k} (\mu_1 - \mu_2)} \right. \\ & + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w (lN+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \frac{\gamma(lN+k-w, \mu_2 t_2)}{\mu_2^{lN+k-w}} \right) \\ & \left. \left. + \frac{(-1)^{lN+k-p-1} (lN+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \frac{\gamma(p+2, \mu_1 t_2)}{\mu_1^{p+2}} \right\} \right] \quad (\text{C.3.3}) \end{aligned}$$

である。また  $F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2)$  は (3.3.18) 式となる。

#### C.4 初診患者の待ち時間の分散値の計算

$E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  の 2 次モーメントを計算する。確率変数  $E_l$  のパラメータ  $lT$  を  $t_2$  と置く  
と確率変数  $E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}$  と等しくなるため、

$$\begin{aligned} & E[(E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k})^2] \\ &= \frac{lN(lN+1)}{\mu_1^2} + \frac{2\lambda_2 lN t_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_2 t_2^2}{\mu_2} + \frac{2\lambda_2 t_2}{\mu_2^2} \quad (\text{C.4.1}) \end{aligned}$$

となる。したがって  $WT_2^l$  の分散値は

$$\begin{aligned} & V[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}] = \frac{lN(lN+1)}{\mu_1^2} + \frac{2\lambda_2 lN t_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_2 t_2^2}{\mu_2} + \frac{2\lambda_2 t_2}{\mu_2^2} \\ & - \int_0^{t_2} t^2 f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t) dt \\ & + t_2^2 F_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2) - E[\max\{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}, t_2\}]^2 \quad (\text{C.4.2}) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} x^2 f_{E'_l + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(x) dx \\ &= \frac{e^{-\lambda_2 t_2} \mu_1^{lN}}{(lN-1)!} \left[ \frac{\gamma(lN+2, \mu_1 t_2)}{\mu_1^{lN+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \lambda_2 t_2)^k}{k!(k-1)!} \sum_{p=0}^{lN-1} \binom{lN-1}{p} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (-1)^{lN-1-p} \left\{ \frac{\gamma(lN+k+1, \mu_2 t_2)}{\mu_2^{lN+k+1} (\mu_1 - \mu_2)} \right. \\
 & + \sum_{w=1}^{lN+k-p-2} \left( \frac{(-1)^w (lN+k-p-2) P_w}{(\mu_1 - \mu_2)^{w+1}} \frac{\gamma(lN+k+1-w, \mu_2 t_2)}{\mu_2^{lN+k-w+1}} \right) \\
 & \left. + \left( \frac{(-1)^{lN+k-p-1} (lN+k-p-2)!}{(\mu_1 - \mu_2)^{lN+k-p-1}} \frac{\gamma(p+3, \mu_1 t_2)}{\mu_1^{p+3}} \right) \right\} \quad (C.4.3)
 \end{aligned}$$

である。また  $F_{E'_i + \sum_{k=N_2((l-1)T)+1}^{N_2(t_2)} S_{2,k}}(t_2)$  は (3.3.18) 式となる。

## 付録 D

# $D^N/M/1$ における予約患者の待ち時間の期待値と分散値の計算

### D.1 予約患者の待ち時間の期待値の計算

$E_{l-1}$  は

$$E_{l-1} = \sum_{k=1}^{(l-1)N_d} S_{1,k} \quad (\text{D.1.1})$$

となる. したがって

$$E[E_{l-1}] = \frac{(l-1)N_d}{\mu_1} \quad (\text{D.1.2})$$

である. (B.1.9) 式に (D.1.2) 式を代入すると  $WT_1^l$  の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= \frac{(l-1)N_d}{\mu_1} - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)TF_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1}(N_d - 1) \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

ここで

$$\int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt = \frac{\gamma((l-1)N_d, (l-1)T\mu_1)}{\mu_1((l-1)N_d - 1)!} \quad (\text{D.1.4})$$

である. また  $F_{E_{l-1}}(t)$  は (4.1.4) 式となる.

### D.2 予約患者の待ち時間の分散値の計算

$E_{l-1}$  の 2 次モーメントを求める.  $E_{l-1}$  は (D.1.1) 式より次数  $(l-1)N_d$ , 平均  $(l-1)N_d/\mu_1$  のアーラン分布に従うために次のようになる.

$$E[E_{l-1}^2] = \frac{(l-1)N_d - ((l-1)N_d)^2}{\mu_1} \quad (\text{D.2.1})$$

したがって  $WT_1^l$  の分散値は

$$\begin{aligned} V[WT_1^l] = & \frac{(l-1)N_d - ((l-1)N_d)^2}{\mu_1} - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \\ & + ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 + V[S_1^l] \end{aligned} \quad (\text{D.2.2})$$

となる. ここで

$$\int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt = \frac{\gamma((l-1)N_d + 1, (l-1)T\mu_1)}{\mu_1^2((l-1)N_d - 1)!} \quad (\text{D.2.3})$$

である. また  $F_{E_{l-1}}(t)$  は (4.1.4) 式となる.



## 付録 E

# $GI + D^{N_d}/M/1$ における各患者の待ち時間の期待値と分散値の計算

### E.1 予約患者の待ち時間の期待値の計算

$WT_1^l$  の期待値を計算する.  $S_1^l$  の期待値と  $E_{l-1}$  の期待値はそれぞれ次のようになる.

$$E[S_1^l] = \frac{1}{2\mu_1}(N_d - 1) \quad (\text{E.1.1})$$

$$E[E_{l-1}] = \frac{(l-1)N_d}{\mu_1} + \frac{E[N_{2,d}((l-1)T)]}{\mu_2} \quad (\text{E.1.2})$$

(B.1.9) 式に (E.1.2) 式と (E.1.1) 式を代入すると  $WT_1^l$  の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= \frac{(l-1)N_d}{\mu_1} + \frac{E[N_{2,d}((l-1)T)]}{\mu_2} - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)T f_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1}(N_d - 1) \end{aligned} \quad (\text{E.1.3})$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) &= P(N_{2,d}((l-1)T) = 0) \frac{\gamma((l-1)N_d + 1, \mu_1(l-1)T)}{\mu_1((l-1)N_d - 1)!} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{(l-1)N_d} \mu_2^j}{((l-1)N_d - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{(l-1)N_d - 1} \binom{(l-1)N_d - 1}{s} (-1)^s \\ &\quad \times P(N_{2,d}((l-1)T) = j) \left\{ \frac{\gamma((l-1)N_d + j, \mu_2(l-1)T)}{\mu_2^{(l-1)N_d + j} (\mu_1 - \mu_2)} \right. \\ &\quad + \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w {}_{(s+j-1)}P_w \frac{\gamma((l-1)N_d + j - w, \mu_2(l-1)T)}{\mu_2^{(l-1)N_d + j - w} (\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \\ &\quad \left. - \frac{\gamma((l-1)N_d - s + 1, (l-1)\mu_1 T) (-1)^{s+j} (s+j-1)!}{\mu_1^{(l-1)N_d - s + 1} (\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.1.4})$$

である. また  $N_{2,d}((l-1)T)$  が  $j$  となる確率はそれぞれ次のようになる.

- 1 つの診療科に医師が 2 人存在するモデル

$$P(N_{2,1}((l-1)T) = n) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \sum_{i=2n-1}^{2n} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i}{i!} \quad (\text{E.1.5})$$

$$P(N_{2,1}((l-1)T) = 0) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \quad (\text{E.1.6})$$

$$P(N_{2,2}((l-1)T) = n) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \sum_{i=2n}^{2n+1} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i}{i!} \quad (\text{E.1.7})$$

- 1 つの診療科に医師が 3 人存在するモデル

$$P(N_{2,1}((l-1)T) = n) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \sum_{i=3n-2}^{3n} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i}{i!} \quad (\text{E.1.8})$$

$$P(N_{2,1}((l-1)T) = 0) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \quad (\text{E.1.9})$$

$$P(N_{2,2}((l-1)T) = n) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \sum_{i=3n-1}^{3n+1} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i}{i!} \quad (\text{E.1.10})$$

$$P(N_{2,2}((l-1)T) = 0) = (1 + \lambda_2(l-1)T) \exp(-\lambda_2(l-1)T) \quad (\text{E.1.11})$$

$$P(N_{2,3}((l-1)T) = n) = \exp(-\lambda_2(l-1)T) \sum_{i=3n}^{3n+2} \frac{(\lambda_2(l-1)T)^i}{i!} \quad (\text{E.1.12})$$

次に  $N_{2,d}(t)$  の期待値を計算する。 $N_{2,d}(t)$  の期待値は次の再生方程式を満たす [23].

$$E[N_{2,d}(t)] = F_{S_{1,d}}(t) + \int_0^t \left( \sum_{k=1}^{\infty} F_{S_{k,d}}(t-u) \right) dF(u) \quad (\text{E.1.13})$$

ここで  $F(t)$  は  $k$  番目 ( $k \geq 2$ ) に到着した患者と  $k+1$  番目に到着した患者の到着時間隔を表わす確率変数の分布関数であり,  $S_{n,d}$  ( $d \in D$ ) は医師  $d$  に  $n$  番目に到着した患者の到着時刻を表わす. (E.1.13) 式をラプラス変換する.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{E[N_{2,d}(t)]\}(s) \\ = \mathcal{L}\{F_{S_{1,d}}(t)\}(s) + \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mathcal{L}\{E[N_{2,d}(t)]\}(s) \end{aligned} \quad (\text{E.1.14})$$

$f(t)$  は  $F(t)$  の密度関数に対応する. 上式を  $\mathcal{L}\{E[N_{2,d}(t)]\}(s)$  に関して解くと

$$\mathcal{L}\{E[N_{2,d}(t)]\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{F_{S_{1,d}}(t)\}(s)}{1 - \mathcal{L}\{f(t)\}(s)} \quad (\text{E.1.15})$$

となるため,  $F_{S_{1,d}}(t)$  と  $f(t)$  から  $N_{2,d}(t)$  の期待値を計算できることが分かる.  $S_{1,d}$  ( $d = 1, 2, 3$ ) の分布関数はそれぞれ次のようになる.

- 初診患者を 2 人の医師に交互に割り当てる場合

$$F_{S_{1,1}}(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t) \quad (\text{E.1.16})$$

$$F_{S_{1,2}}(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^1 \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \quad (\text{E.1.17})$$

- 初診患者を 3 人の医師に交互に割り当てる場合

$$F_{S_{1,1}}(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t) \quad (\text{E.1.18})$$

$$F_{S_{1,2}}(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^1 \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \quad (\text{E.1.19})$$

$$F_{S_{1,3}}(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t) \sum_{i=0}^2 \frac{(\lambda_2 t)^i}{i!} \quad (\text{E.1.20})$$

$f(t)$  は次のようになる.

- 初診患者を 2 人の医師に交互に割り当てる場合

$$f(t) = \lambda_2^2 t e^{-\lambda_2 t} \quad (\text{E.1.21})$$

$$(\text{E.1.22})$$

- 初診患者を 3 人の医師に交互に割り当てる場合

$$f(t) = \frac{\lambda_2^3}{2!} t^2 e^{-\lambda_2 t} \quad (\text{E.1.23})$$

$S_{1,d}$  の分布関数のラプラス変換は次のようになる.

- 初診患者を 2 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\mathcal{L}\{P(S_{1,1} \leq t)\}(s) = \frac{\lambda_2}{s(s + \lambda_2)} \quad (\text{E.1.24})$$

$$\mathcal{L}\{P(S_{1,2} \leq t)\}(s) = \frac{\lambda_2^2}{s(s + \lambda_2)^2} \quad (\text{E.1.25})$$

- 初診患者を 3 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\mathcal{L}\{P(S_{1,1} \leq t)\}(s) = \frac{\lambda_2}{s(s + \lambda_2)} \quad (\text{E.1.26})$$

$$\mathcal{L}\{P(S_{1,2} \leq t)\}(s) = \frac{\lambda_2^2}{s(s + \lambda_2)^2} \quad (\text{E.1.27})$$

$$\mathcal{L}\{P(S_{1,3} \leq t)\}(s) = \frac{\lambda_2^3}{s(s + \lambda_2)^3} \quad (\text{E.1.28})$$

$f(t)$  のラプラス変換は次のようになる.

- 初診患者を 2 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \left(\frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}\right)^2 \quad (\text{E.1.29})$$

$$(\text{E.1.30})$$

- 初診患者を 3 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\lambda_2^3}{(s + \lambda_2)^3} \quad (\text{E.1.31})$$

したがって

- 初診患者を 2 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\mathcal{L}\{E[N_{2,1}(t)]\}(s) = \frac{\frac{\lambda_2}{s(s+\lambda_2)}}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^2} = \frac{\lambda_2(s+\lambda_2)}{s^2(s+2\lambda_2)} \quad (\text{E.1.32})$$

$$\mathcal{L}\{E[N_{2,2}(t)]\}(s) = \frac{\frac{1}{s}\left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^2} = \frac{\lambda_2^2}{s^2(s+2\lambda_2)} \quad (\text{E.1.33})$$

- 初診患者を 3 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\mathcal{L}\{E[N_{2,1}(t)]\}(s) = \frac{\frac{\lambda_2}{s(s+\lambda_2)}}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^3} = \frac{\lambda_2 s^2 + 2\lambda_2^2 s + \lambda_2^3}{s^2(s^2 + 3\lambda_2 s + 3\lambda_2^2)} \quad (\text{E.1.34})$$

$$\mathcal{L}\{E[N_{2,2}(t)]\}(s) = \frac{\left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^3} = \frac{\lambda_2^2(s+\lambda_2)}{s^2(s^2 + 3\lambda_2 s + 3\lambda_2^2)} \quad (\text{E.1.35})$$

$$\mathcal{L}\{E[N_{2,3}(t)]\}(s) = \frac{\frac{\lambda_2^3}{s(s+\lambda_2)^3}}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right)^3} = \frac{\lambda_2^3}{s^2(s^2 + 3\lambda_2 s + 3\lambda_2^2)} \quad (\text{E.1.36})$$

となる。上式をそれぞれ逆ラプラス変換することにより  $N_{2,d}(t)$  の期待値は次のようになる。

- 初診患者を 2 人の医師に交互に割り当てる場合

$$E[N_{2,1}(t)] = \frac{\lambda_2 t}{2} + \frac{1}{4}(1 - \exp(-2\lambda_2 t)) \quad (\text{E.1.37})$$

$$E[N_{2,2}(t)] = \frac{\lambda_2 t}{2} - \frac{1}{4}(1 - \exp(-2\lambda_2 t)) \quad (\text{E.1.38})$$

- 初診患者を 3 人の医師に交互に割り当てる場合

$$\begin{aligned} E[N_{2,1}(t)] &= \frac{1}{3\lambda_2}(2\lambda_2 - 1) + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3\lambda_2}(e^{-\frac{3\lambda_2 t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}\lambda_2 t}{2}) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}\lambda_2}(\frac{5}{6} - \lambda_2)e^{-\frac{3\lambda_2 t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 t)) \end{aligned} \quad (\text{E.1.39})$$

$$E[N_{2,2}(t)] = \frac{\lambda_2 t}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2 t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 t) \quad (\text{E.1.40})$$

$$\begin{aligned} E[N_{2,3}(t)] &= \frac{\lambda_2 t - 1}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2 t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 t) \\ &\quad - \frac{5}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda_2 t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 t) \end{aligned} \quad (\text{E.1.41})$$

これらの値を (E.1.3) 式に代入することにより  $WT_1^l$  の期待値を計算できる。

## E.2 予約患者の待ち時間の分散値の計算

$E_l$  の積率母関数は

$$E[\exp(sE_l)] = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s}\right)^{lN_d} P(N_{2,d}(lT) = 0)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \right)^{lN_d} \left( \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \right)^j P(N_{2,d}(lT) = j) \quad (\text{E.2.1})$$

である. (E.2.1) 式を 2 階微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E[\exp(sE_l)]}{ds^2} &= \frac{lN_d(lN_d + 1)\mu_1^{lN_d}}{(\mu_1 - s)^{lN_d+2}} P(N_{2,d}(lT) = 0) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} P(N_{2,d}(lT) = j) \left\{ \frac{j\mu_1^{lN_d}\mu_2^j((j+1)(\mu_1 - s) + lN_d(\mu_2 - s))}{(\mu_2 - s)^{j+2}(\mu_1 - s)^{lN_d+1}} \right. \\ &\left. + \frac{lN_d\mu_1^{lN_d}\mu_2^j(j(\mu_1 - s) + (lN_d + 1)(\mu_2 - s))}{(\mu_1 - s)^{lN_d+2}(\mu_2 - s)^{j+1}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.2.2})$$

となる. したがって  $E_l$  の 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} E[E_l^2] &= \frac{d^2 E[\exp(sE_l)]}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{lN_d(lN_d + 1)}{\mu_1^2} P(N_{2,d}(lT) = 0) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} P(N_{2,d}(lT) = j) \left\{ \frac{j((j+1)\mu_1 + lN_d\mu_2)}{\mu_2^2\mu_1} + \frac{lN_d(j\mu_1 + (lN_d + 1)\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.2.3})$$

となる. (B.2.9) 式に上式を代入すると,  $WT_1^l$  ( $l \in L$ ) の分散値は

$$\begin{aligned} V[WT_1^l] &= \frac{(l-1)N_d((l-1)N_d + 1)}{\mu_1^2} P(N_{2,d}((l-1)T) = 0) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} P(N_{2,d}((l-1)T) = j) \left\{ \frac{j((j+1)\mu_1 + (l-1)N_d\mu_2)}{\mu_2^2\mu_1} \right. \\ &+ \left. \frac{(l-1)N_d(j\mu_1 + ((l-1)N_d + 1)\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2} \right\} - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &+ ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 + \frac{1}{2\mu_1} (N_d - 1) \end{aligned} \quad (\text{E.2.4})$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt &= P(N_{2,d}((l-1)T) = 0) \frac{\gamma((l-1)N_d + 2, \mu_1(l-1)T)}{\mu_1^2((l-1)N_d - 1)!} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_1^{(l-1)N_d}\mu_2^j}{((l-1)N_d - 1)!(j-1)!} \sum_{s=0}^{(l-1)N_d-1} \binom{(l-1)N_d - 1}{s} (-1)^s \\ &\times P(N_{2,d}((l-1)T) = j) \left\{ \frac{\gamma((l-1)N_d + j + 1, \mu_2(l-1)T)}{\mu_2^{(l-1)N_d+j+1}(\mu_1 - \mu_2)} \right. \\ &+ \sum_{w=1}^{s+j-1} (-1)^w (s+j-1)P_w) \frac{\gamma((l-1)N_d + j + 1 - w, \mu_2(l-1)T)}{\mu_2^{(l-1)N_d+j+1-w}(\mu_1 - \mu_2)^{1+w}} \\ &\left. - \frac{\gamma((l-1)N_d - s + 2, (l-1)\mu_1 T)(-1)^{s+j}(s+j-1)!}{\mu_1^{(l-1)N_d-s+2}(\mu_1 - \mu_2)^{s+j}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.2.5})$$

である. 各モデルに対して (E.1.5) 式から (E.1.12) 式を代入すると分散値を計算出来る.

## 付録 F

# $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ における各患者の待ち時間の期待値と分散値の計算

### F.1 予約患者の待ち時間の期待値の計算

$S_1^l$  の期待値を計算する. 確率変数  $S_1^l$  は  $l$  枠に到着する予約患者の中で  $C_1^{l*}$  より前にならぶ予約患者の合計診察時間のため, 期待値は次のようになる.

$$E[S_1^l] = \frac{1}{2\mu_1}(N^l - 1) \quad (\text{F.1.1})$$

また,

$$E[E_{l-1}] = E\left[\sum_{l_1=1}^{l-1} \left(\sum_{k=1}^{N^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} + \sum_{k=1}^{N_2^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}\right)\right] = \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N^{l_1}} E[S_{1,k}^{l_1}] + \sum_{l_1=1}^{l-1} E\left[\sum_{k=1}^{N_2^{l_1}(T)} S_{2,k}^{l_1}\right] \quad (\text{F.1.2})$$

となる. リトルの公式より,  $E_{l-1}$  の期待値は次のようになる.

$$E[E_{l-1}] = \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}{\mu_2} \quad (\text{F.1.3})$$

(F.1.1) 式, (F.1.3) 式を (B.1.9) 式に代入することにより,  $WT_1^l$  の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}{\mu_2} - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)T F_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1}(N^l - 1) \end{aligned} \quad (\text{F.1.4})$$

ここで

$$\begin{aligned} &\int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &= \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 (l-1)T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 1) \exp(-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_2 \mu_2)^{k \alpha_2}}{k! (k \alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times (-1)^j \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 (l-1) T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k \alpha_2)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2) (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k \alpha_2}} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k \alpha_2 - 1} (-1)^w ({}_{j+k \alpha_2 - 1} P_w) \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 (l-1) T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k \alpha_2 - w)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k \alpha_2 - w}} \\
& \left. + \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 (l-1) T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - j + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - j + 1} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k \alpha_2}} (-1)^{j+k \alpha_2 - 1 + 1} (j + k \alpha_2 - 1)! \right\} \quad (F.1.5)
\end{aligned}$$

である。  $F_{E_l}(t)$  は (6.3.25) 式となる。

## F.2 予約患者の待ち時間の分散値の計算

$E_{l-1}$  の 2 次モーメントを積率母関数を用いて求める。  $E_l$  の積率母関数は次の形である。

$$M_{E_l}(s) = \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) \quad (F.2.1)$$

2 階微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 M_{E_l}(s)}{ds^2} &= \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1) (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 2}} \\
& \times \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) \\
& + \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1}} \frac{\alpha_2 (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 + 1}} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) \\
& \times \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) \\
& + \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left\{ \left(\frac{\alpha_2 (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 + 1}} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right)^2 \right. \\
& \times \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) + \frac{\alpha_2 (\alpha_2 + 1) (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 + 2}} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) \\
& \times \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) \left. \right\} \\
& + \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1}} \frac{\alpha_2 (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 + 1}} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)
\end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right) + \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T\right)\right) \quad (\text{F.2.2})$$

となる。したがって  $E_l$  の 2 次モーメントは次のようになる。

$$\begin{aligned} E[E_l^2] &= \frac{d^2 M_{E_l}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{\alpha_1 \mu_1^2} + \frac{2(\sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)}{\mu_1 \mu_2} \\ &\quad + \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^2}{\mu_2^2} + \frac{(\alpha_2 + 1) \sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T}{\alpha_2 \mu_2^2} \end{aligned} \quad (\text{F.2.3})$$

$S_1^l$  の分散値を計算する。

$$V[S_1^l] = E[(S_1^l)^2] - E[S_1^l]^2 \quad (\text{F.2.4})$$

$S_1^l$  の 2 次モーメントを積率母関数を用いて計算する。

$$\begin{aligned} M_{S_1^l}(s) &= E[\exp(s S_1^l)] \\ &= \sum_{j=1}^{N^l} \prod_{k=0}^{j-1} E[\exp(s S_{1,k}) | \{C_1^{l*} \text{ が } j \text{ 番目に診察を受ける } \}] \\ &\quad \times P(\{C_1^{l*} \text{ が } j \text{ 番目に診察を受ける } \}) \\ &= \frac{1}{N^l} \sum_{j=1}^{N^l} \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{(j-1)\alpha_1} \end{aligned} \quad (\text{F.2.5})$$

(F.2.5) 式を 2 階微分する。

$$\frac{d^2 M_{S_1^l}(s)}{ds^2} = \frac{1}{N^l} \sum_{j=2}^{N^l} (j-1)\alpha_1((j-1)\alpha_1 + 1) \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{(j-1)\alpha_1}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{(j-1)\alpha_1 + 2}}$$

したがって、 $S_1^l$  の 2 次モーメントは次のようになる。

$$\begin{aligned} E[(S_1^l)^2] &= \frac{d^2 M_{S_1^l}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\alpha_1}{N^l (\alpha_1 \mu_1)^2} \left\{ \alpha_1 \sum_{j=2}^{N^l} (j-1)^2 + \sum_{j=2}^{N^l} (j-1) \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha_1 \mu_1^2} \left\{ \frac{\alpha_1}{6} (N^l - 1)(2N^l - 1) + \frac{1}{2} (N^l - 1) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.2.6})$$

$S_1^l$  の分散値は次のようになる。

$$V[S_1^l] = \frac{1}{\alpha_1 \mu_1^2} \left\{ \frac{\alpha_1}{6} (N^l - 1)(2N^l - 1) + \frac{1}{2} (N^l - 1) \right\} - E[S_1^l]^2 \quad (\text{F.2.7})$$



以上より,  $WT_1^l$  の分散値は次式となる.

$$\begin{aligned}
V[WT_1^l] = & \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 1) \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1^2} + \frac{2(\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1})(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}{\mu_1 \mu_2} \\
& + \left( \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}{\mu_2} \right)^2 + \frac{\alpha_2(\alpha_2 + 1) \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}{(\alpha_2 \mu_2)^2} \\
& - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt + ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) \\
& - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 + \frac{1}{\alpha_1 \mu_1^2} \left\{ \frac{\alpha_1}{6} (N^l - 1)(2N^l - 1) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (N^l - 1) \right\} - E[S_1^l]^2
\end{aligned} \tag{F.2.8}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt = & \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 (l-1)T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 2) \exp(-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \mu_1)^2 (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \\
& + \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} \exp(-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)!} \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^k (\alpha_2 \mu_2)^{k\alpha_2}}{k! (k\alpha_2 - 1)!} \sum_{j=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{j} \\
& \times (-1)^j \left\{ \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 (l-1)T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k\alpha_2 + 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k\alpha_2 + 1}} \right. \\
& + \sum_{w=1}^{j+k\alpha_2-1} (-1)^w {}_{(j+k\alpha_2-1)}P_w \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 (l-1)T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k\alpha_2 - w + 1)}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + k\alpha_2 - w + 1}} \\
& \left. + \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 (l-1)T, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - j + 2)}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - j + 2} (\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{j+k\alpha_2}} (-1)^{j+k\alpha_2-1+1} (j+k\alpha_2-1)! \right\}
\end{aligned} \tag{F.2.9}$$

である.  $F_{E_l}(t)$  は (6.3.25) 式となる.

## 付録 G

# $D^{N_1^l}/E_{\alpha_1}/1$ における予約患者の待ち時間の期待値と分散値の計算

### G.1 予約患者の待ち時間の期待値の計算

$S_1^l$  の期待値と  $E_l$  の期待値を計算する.

$$E[S_1^l] = \frac{1}{2\mu_1}(N_1^l - 1) \quad (\text{G.1.1})$$

また  $E_{l-1}$  は

$$E_{l-1} = \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_1^{l_1}} S_{1,k}^{l_1} \quad (\text{G.1.2})$$

となるため,

$$E[E_{l-1}] = E\left[\sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_1^{l_1}} S_{1,k}^{l_1}\right] = \sum_{l_1=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{N_1^{l_1}} E[S_{1,k}^{l_1}] = \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}}{\mu_1} \quad (\text{G.1.3})$$

である. (B.1.9) 式に (G.1.1) 式と (G.1.3) 式を代入すると  $WT_1^l$  の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_1^{l_1}}{\mu_1} - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)TF_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1}(N_1^{l_1} - 1) \end{aligned} \quad (\text{G.1.4})$$

ここで  $\int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt$  は

$$\int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt = \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1} + 1, \alpha_1 \mu_1 (l-1)T)}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N_1^{l_1} - 1)!} \quad (\text{G.1.5})$$

である.

## 付録 H

# $M^l + D^{N^l}/E_{\alpha_1, \alpha_2}/1$ における各患者の待ち時間の期待値の計算

### H.1 予約患者の待ち時間の期待値の計算

$WT_1^l$  ( $l \in L$ ) の期待値は

$$\begin{aligned} E[WT_1^l] &= E[E_{l-1}] - \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\ &\quad + (l-1)T F_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + E[S_1^l] \end{aligned} \quad (\text{H.1.1})$$

となる.

$$\begin{aligned} E[E_l] &= E\left[ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} E[S_{1,k}] + E\left[ \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \right] \\ &= \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + E\left[ \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \right] \end{aligned} \quad (\text{H.1.2})$$

ここで

$$\begin{aligned} &E\left[ \sum_{k=1}^{\min\{n_l, \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n_l} E\left[ \sum_{k=1}^j S_{2,k} \right] P\left( \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j \right) + \sum_{j=n_l+1}^{\infty} E\left[ \sum_{k=1}^{n_l} S_{2,k} \right] P\left( \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) = j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n_l} \frac{j}{\mu_2} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} + \sum_{j=n_l+1}^{\infty} \frac{n_l}{\mu_2} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \end{aligned} \quad (\text{H.1.3})$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
 E[WT_1^l] &= \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\mu_1} + e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{\mu_2(j-1)!} \\
 &+ \frac{n_{l-1}}{\mu_2} \left\{ 1 - e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \sum_{j=0}^{n_{l-1}} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\} \\
 &- \int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt + (l-1)TF_{E_{l-1}}((l-1)T) - (l-1)T + \frac{1}{2\mu_1}(N^l - 1)
 \end{aligned} \tag{H.1.4}$$

となる。ここで  $F_{E_l}(t)$  は (9.4.12) 式であり、

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{(l-1)T} t f_{E_{l-1}}(t) dt \\
 &= \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 1, \alpha_1 \mu_1 (l-1)T) e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{\alpha_1 \mu_1 (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} - 1)!} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \int_0^{(l-1)T} t f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^j S_{2,k}}(t) dt \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \int_0^{(l-1)T} t f_{\sum_{k=1}^{l-1} N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_{l-1}} S_{2,k}}(t) dt \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \right\}
 \end{aligned} \tag{H.1.5}$$

である。

## H.2 予約患者の待ち時間の分散値の計算

$WT_1^l$  の分散値は

$$\begin{aligned}
 V[WT_1^l] &= E[E_{l-1}^2] - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \\
 &+ ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 + V[S_1^l]
 \end{aligned} \tag{H.2.1}$$

となる。 $E_l$  の積率母関数は、

$$\begin{aligned}
 M_{E_l}(s) &= \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_l} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
 &+ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 n_l} \\
 &\times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \right\}
 \end{aligned} \tag{H.2.2}$$

であるため、2 階微分を計算する。

$$\frac{d^2}{ds^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 2}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \\
&+ \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1}} \frac{\alpha_2 j (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 j + 1}} \\
&+ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \frac{\alpha_2 j (\alpha_2 j + 1) (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 j + 2}} \\
&+ \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1}} \frac{\alpha_2 j (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_2 \mu_2 - s)^{\alpha_2 j + 1}}
\end{aligned} \tag{H.2.3}$$

であるため,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{ds^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \right\} \Big|_{s=0} \\
&= \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \\
&+ \frac{2\alpha_1 j \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 j (\alpha_2 j + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2}
\end{aligned} \tag{H.2.4}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}
E[E_l^2] &= \frac{d^2 M_{E_l}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1) (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \mu_1 - s)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 2}} \Big|_{s=0} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_l} \left[ \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 j} \right\} \Big|_{s=0} \right] \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
&+ \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 n_l} \right\} \Big|_{s=0} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \right\} \\
&= \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} (\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1}} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_l} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\
&+ \frac{2j \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 j (\alpha_2 j + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} \left. \right\} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \\
&+ \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} + \frac{2n_l \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 n_l (\alpha_2 n_l + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} \right\} \\
&\times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^l \lambda_2^{l_1} T} \right\}
\end{aligned} \tag{H.2.5}$$

また  $S_1^l$  の分散値は次式となる.

$$V[S_1^l] = \frac{1}{\alpha_1 \mu_1^2} \left\{ \frac{\alpha_1}{6} (N^l - 1)(2N^l - 1) + \frac{1}{2} (N^l - 1) \right\} - E[S_1^l]^2 \quad (\text{H.2.6})$$

これより  $WT_1^l$  の分散値は次式となる.

$$\begin{aligned} V[WT_1^l] = & \frac{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 1) e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \\ & + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}) (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\ & + \frac{2j \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 j (\alpha_2 j + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} \left. \right\} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \\ & + \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}) (\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} + \frac{2n_{l-1} \sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 n_{l-1} (\alpha_2 n_{l-1} + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} \right\} \\ & \times \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{n_{l-1}} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T} \right\} - \int_0^{(l-1)T} t^2 f_{E_{l-1}}(t) dt \\ & + ((l-1)T)^2 F_{E_{l-1}}((l-1)T) - E[\max\{E_{l-1}, (l-1)T\}]^2 \\ & + \frac{1}{\alpha_1 \mu_1^2} \left\{ \frac{\alpha_1}{6} (N^l - 1)(2N^l - 1) + \frac{1}{2} (N^l - 1) \right\} - E[S_1^l]^2 \end{aligned} \quad (\text{H.2.7})$$

### H.3 初診患者の待ち時間の期待値の計算

$$\begin{aligned} E[WT_2^l] = & E[\max\{ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2, 0 \}; \\ & \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l] \\ & + \sum_{l'=l+1}^{l+4} E[ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N_2^{l_1}(T) + N_2^{l'}(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2; \\ & n_{l'-1} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'}] \\ & + E[ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N_2^{l_1}(T) + N_2^{l+5}(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2; \\ & n_{l+4} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l+4} \end{aligned} \quad (\text{H.3.1})$$

第 1 項は全確率の公式より

$$\begin{aligned}
& E[\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2, 0\}; \\
& \quad \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l] \\
&= \sum_{i=0}^{n_l} E[\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}] \\
& \quad \times P(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i)
\end{aligned} \tag{H.3.2}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}
& E[\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}] \\
&= E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2; \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \geq t_2]
\end{aligned} \tag{H.3.3}$$

である. (H.3.3) 式は広義積分を避けるために

$$\begin{aligned}
& E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2; \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \geq t_2] \\
&= E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2] \\
& \quad - E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2; \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t_2]
\end{aligned} \tag{H.3.4}$$

とし, 右辺を計算する. それぞれ

$$\begin{aligned}
& E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2] = \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 \\
& E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2; \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t_2] \\
&= \int_0^{t_2} (t - t_2) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt
\end{aligned} \tag{H.3.5}$$

となるため, (H.3.4) 式は

$$E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0]; \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \geq t_2]$$

$$= \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 - \int_0^{t_2} (t - t_2) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt \quad (\text{H.3.6})$$

となる. (H.3.6) 式を (H.3.2) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} & E[\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2, 0\}; \\ & \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l] \\ &= \sum_{i=0}^{n_l} \left\{ \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 - \int_0^{t_2} (t - t_2) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt \right\} \\ & \times P(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i) \end{aligned} \quad (\text{H.3.7})$$

となる. 次に (H.3.1) 式の第 2 項以降を計算する. 全確率の公式より

$$\begin{aligned} & E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2; \\ & n_{l'} - 1 + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'}] \\ &= \sum_{i=n_{l'}-1+1}^{n_{l'}} E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2] \\ & \times P(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i) \end{aligned} \quad (\text{H.3.8})$$

となる.

$$E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2] = \frac{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 \quad (\text{H.3.9})$$

であるため

$$\begin{aligned} & E[\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2; \\ & n_{l'} - 1 + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'}] \\ &= \sum_{i=n_{l'}-1+1}^{n_{l'}} \left\{ \frac{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 \right\} P(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i) \end{aligned} \quad (\text{H.3.10})$$



となる. 同様に

$$\begin{aligned}
 E[ & \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2; \\
 & n_{l+4} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)] \\
 = & \sum_{i=\sum_{l_1=1}^{l+5} n^{l_1}+1}^{\infty} \left\{ \frac{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 \right\} \\
 & \times P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \quad (\text{H.3.11})
 \end{aligned}$$

となる.

(H.3.7) 式と (H.3.10) 式を (H.3.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
 E[WT_2^l] = & \sum_{i=0}^{n_l} \left\{ \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 - \int_0^{t_2} (t - t_2) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt \right\} \\
 & \times P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \\
 & + \sum_{l'=l+1}^{l+4} \left\{ \sum_{i=n_{l'-1}+1}^{n_{l'}} \left( \frac{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 \right) P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \right\} \\
 & + \sum_{i=n_{l+4}+1}^{\infty} \left( \frac{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} - t_2 \right) P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \quad (\text{H.3.12})
 \end{aligned}$$

$\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$  はパラメータ  $\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)$  のポアソン分布に従うため, 上式を整理すると  $WT_2^l$  の期待値は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 E[WT_2^l] = & \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)}{\mu_2} - t_2 \\
 & + \sum_{i=0}^{n_l} \left[ \left( \int_0^{t_2} (t_2 - t) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt \right) \right. \\
 & \times \frac{\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}^i}{i!} e^{-\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}} \left. \right] \\
 & + \sum_{l'=l+1}^{l+5} \frac{N^{l'}}{\mu_1} \left[ 1 - e^{-\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}} \sum_{i=0}^{n_{l'-1}} \frac{\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}^i}{i!} \right] \quad (\text{H.3.13})
 \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{t_2} (t_2 - t) f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 i}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 i - 1)!} \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{s} \\
&\times \left[ \frac{\{ \frac{t_2 \gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - 1}} - \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i}} \}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s+\alpha_2 i-1} ((-1)^w {}_{s+\alpha_2 i-1}P_w) \\
&\times \frac{\{ t_2 \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s - 1}} - \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s}} \}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \\
&+ \frac{\{ t_2 \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t_2, p+1)}{(\alpha_1 \mu_1)^{p+1}} - \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t_2, p+2)}{(\alpha_1 \mu_1)^{p+2}} \}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s+\alpha_2 i}} (-1)^{s+\alpha_2 i} (s + \alpha_2 i - 1)! \Big] \quad (\text{H.3.14})
\end{aligned}$$

である.

#### H.4 初診患者の待ち時間の分散値の計算

$$V[WT_2^l] = E[(WT_2^l)^2] - E[WT_2^l]^2 \quad (\text{H.4.1})$$

$WT_2^l$  の積率母関数を求める.

$$\begin{aligned}
&E[\exp(sWT_2^l)] \\
&= E[\exp(s(\max\{ \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2, 0 \})); \\
&\quad \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l] \\
&+ \sum_{l'=l+1}^{l+4} E[\exp(s( \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2)); \\
&\quad n_{l'-1} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'}] \\
&+ E[\exp(s( \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2)); \\
&\quad n_{l+4} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l+5}]) \quad (\text{H.4.2})
\end{aligned}$$

(H.4.2) 式の第 1 項は

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{N_2(t_2)} S_{2,k} - t_2, 0\})); \\
& \quad \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l] \\
&= \sum_{i=0}^{n_l} E[\exp(s(\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\})) \\
& \quad | \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i] P(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i) \quad (H.4.3)
\end{aligned}$$

となる.  $\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$  と  $\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\}$  の独立性より

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\})) | \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i] \\
&= E[\exp(0); \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t_2] + E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2))] \\
& \quad - E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2)); \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t_2] \\
&= F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t_2) + E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2))] \\
& \quad - E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2)); \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t_2] \quad (H.4.4)
\end{aligned}$$

となる. ここで  $S_{i,k}$  ( $i \in I$ ) の独立性より

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2))] \\
&= (\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s})^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} (\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s})^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \quad (H.4.5)
\end{aligned}$$

と計算出来る. また

$$\begin{aligned}
& E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2)); \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} \leq t_2] \\
&= \int_0^{t_2} \exp(s(t - t_2)) dF_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) \quad (H.4.6)
\end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned}
 & E[\exp(s(\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k} - t_2, 0\})) | \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i] \\
 &= F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t_2) + \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \\
 &\quad - \int_0^{t_2} \exp(s(t-t_2)) dF_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t)
 \end{aligned} \tag{H.4.7}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}
 & E[\exp(s(\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2, 0\})); \\
 &\quad \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_l] \\
 &= \sum_{i=0}^{n_l} \{F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t_2) + \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \\
 &\quad - \int_0^{t_2} \exp(s(t-t_2)) dF_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t)\} \\
 &\quad \times P(\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i)
 \end{aligned} \tag{H.4.8}$$

となる.

(H.4.2) 式の第 2 項は  $\sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$  と  $S_{i,k}$  ( $i \in I$ ) の独立性より

$$\begin{aligned}
 & E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2)); \\
 &\quad ; n_{l'-1} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'}] \\
 &= \sum_{i=n_{l'-1}+1}^{n_{l'}} \left(\frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left(\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \\
 &\quad \times P(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i)
 \end{aligned} \tag{H.4.9}$$

となる. したがって

$$\sum_{l'=l+1}^{l+4} E[\exp(s(\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)} S_{2,k} - t_2));$$

$$\begin{aligned}
n_{l'-1} + 1 &\leq \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) \leq n_{l'} \\
&= \sum_{l'=l+1}^{l+4} \left\{ \sum_{i=n_{l'-1}+1}^{n_{l'}} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \right. \\
&\quad \times P\left( \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i \right) \Big\}
\end{aligned} \tag{H.4.10}$$

である.

(H.4.2) 式の第 3 項は第 2 項の計算と同様に

$$\begin{aligned}
&E[\exp(s(\sum_{k=1}^{l_1+5} S_{1,k} + \sum_{k=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)) S_{2,k} - t_2)); \\
&\quad n_{l+4} + 1 \leq \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)] \\
&= \sum_{i=n_{l+4}+1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \\
&\quad \times P\left( \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i \right)
\end{aligned} \tag{H.4.11}$$

となる. 以上をまとめると  $WT_2^l$  の積率母関数は次式となる.

$$\begin{aligned}
&E[\exp(sWT_2^l)] \\
&= \sum_{i=0}^{n_l} \left\{ F_{\sum_{k=1}^{l_1+1} N^{l_1}}(t_2) + \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_2} \exp(s(t-t_2)) dF_{\sum_{k=1}^{l_1+1} N^{l_1}}(t) \right\} \\
&\quad \times P\left( \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i \right) \\
&+ \sum_{l'=l+1}^{l+4} \left\{ \sum_{i=n_{l'-1}+1}^{n_{l'}} \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \right. \\
&\quad \times P\left( \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i \right) \Big\} \\
&+ \sum_{i=n_{l+4}+1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \right. \\
&\quad \times P\left( \sum_{l_1=1}^l N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i \right) \Big\}
\end{aligned} \tag{H.4.12}$$

$WT_2^l$  の 2 次モーメントを算出する.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \right\} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} + \frac{2\alpha_1 i \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 i(\alpha_2 i + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{H.4.13})$$

であるため,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\alpha_1 \mu_1 - s} \right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2 \mu_2 - s} \right)^{\alpha_2 i} \exp(-st_2) \right\} \Big|_{s=0} = \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \\ & + \frac{2\alpha_1 i \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 i(\alpha_2 i + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} - 2t_2 \left( \frac{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} \right) + t_2^2 \end{aligned} \quad (\text{H.4.14})$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} E[WT_2^{l^2}] &= \sum_{i=0}^{n_l} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\ & + \frac{2\alpha_1 i \sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 i(\alpha_2 i + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} - 2t_2 \left( \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} \right) + t_2^2 \\ & - \int_0^{t_2} (t - t_2)^2 dF_{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) \Big\} P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \\ & + \sum_{l'=l+1}^{l+4} \sum_{i=n^{l'-1}+1}^{n^{l'}} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\ & + \frac{2\alpha_1 i \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 i(\alpha_2 i + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} - 2t_2 \left( \frac{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} \right) + t_2^2 \Big\} \\ & \times P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \\ & + \sum_{i=n^{l+4}+1}^{\infty} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\ & + \frac{2\alpha_1 i \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}}{\alpha_1 \mu_1 \mu_2} + \frac{\alpha_2 i(\alpha_2 i + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^2} - 2t_2 \left( \frac{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}}{\mu_1} + \frac{i}{\mu_2} \right) + t_2^2 \Big\} \\ & \times P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) \end{aligned} \quad (\text{H.4.15})$$

となる.  $\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T)$  はパラメータ  $\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)$  のポアソン分布に従うため, 上式を整理すると,

$$\begin{aligned} E[WT_2^{l^2}] &= \sum_{i=0}^{n_l} \left\{ \left[ - \int_0^{t_2} (t - t_2)^2 dF_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) \right] \right. \\ & \times \frac{\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}^i}{i!} e^{-\left\{ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right\}} \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{n_l} \left[ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\
& \quad \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}} \\
& + \sum_{l'=l+1}^{l+4} \sum_{i=n_{l'-1}+1}^{n_{l'}} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} - 2t_2 \frac{\sum_{l_1=l+1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} \right\} \\
& \quad \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}} \\
& + \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} - 2t_2 \frac{\sum_{l_1=l+1}^{l+5} N^{l_1}}{\mu_1} \right\} \\
& \quad \times \left[ 1 - \sum_{i=0}^{n_{l+4}} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}} \right] \\
& + \frac{2 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} \{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}}{\mu_1 \mu_2} \\
& + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) + \{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^2}{\mu_2^2} \\
& + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)}{\alpha_2 \mu_2^2} - \frac{2t_2 \{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}}{\mu_2} \\
& + t_2^2 - 2t_2 \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \sum_{l'=l+1}^{l+5} \frac{2N^{l'}}{\mu_1 \mu_2} \left[ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=0}^{n_{l'-1}} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^i}{(i-1)!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}} \right] \tag{H.4.16}
\end{aligned}$$

となる. したがって  $WT_2^l$  の分散値は次式となる.

$$\begin{aligned}
V[WT_2^l] &= \sum_{i=0}^{n_l} \left\{ - \int_0^{t_2} (t - t_2)^2 dF_{\sum_{k=1}^l N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) \right\} \\
& \times P\left(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2 - (l-1)T) = i\right) + \sum_{i=0}^{n_l} \left[ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} \right. \\
& \quad \times \frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T))^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}} \\
& + \sum_{l'=l+1}^{l+4} \sum_{i=n_{l'-1}+1}^{n_{l'}} \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} - 2t_2 \frac{\sum_{l_1=l+1}^{l'} N^{l_1}}{\mu_1} \right\} \\
& \quad \times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l(t_2 - (l-1)T)\}} \\
& + \left\{ \frac{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1})(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1} + 1)}{(\alpha_1 \mu_1)^2} - 2t_2 \frac{\sum_{l_1=l+1}^{l+5} N^{l_1}}{\mu_1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left(1 - \sum_{i=0}^{n_l+4} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^i}{i!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}} \right\} \right. \\
& + \frac{2 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)}{\mu_1 \mu_2} \\
& + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T) + \{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^2}{\mu_2^2} \\
& + \frac{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)}{\alpha_2 \mu_2^2} - \frac{2\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\} t_2}{\mu_2} \\
& + t_2^2 - 2t_2 \frac{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}}{\mu_1} + \sum_{l'=l+1}^{l+5} \frac{2N^{l'}}{\mu_1 \mu_2} \left[ \sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T) - \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^{n_{l'}-1} \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}^i}{(i-1)!} e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^l (t_2 - (l-1)T)\}} \right] \\
& \left. - E[WT_2^l]^2 \right\} \tag{H.4.17}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_2} (t - t_2)^2 dF_{\sum_{k=1}^l N^{l_1} S_{1,k} + \sum_{k=1}^i S_{2,k}}(t) = \frac{(\alpha_1 \mu_1)^{\sum_{l_1=1}^l N^{l_1}} (\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_2 i}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1)! (\alpha_2 i - 1)!} \\
& \times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \\
& \times \left\{ \frac{\frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i + 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i + 1}} - 2t_2 \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i}}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{t_2^2 \gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - 1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)} \right\} \\
& + \sum_{w=1}^{s+\alpha_2 i-1} ((-1)^w {}_{s+\alpha_2 i-1}P_w) \\
& \times \left\{ \frac{\frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i + 1 - s)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i + 1 - s}} - 2t_2 \frac{\gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s}}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\frac{t_2^2 \gamma(\alpha_2 \mu_2 t_2, \alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s - 1)}{(\alpha_2 \mu_2)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^l N^{l_1} + \alpha_2 i - s - 1}}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{1+w}} \right\} \\
& + \frac{\left\{ \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t_2, p+3)}{(\alpha_1 \mu_1)^{p+3}} - 2t_2 \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t_2, p+2)}{(\alpha_1 \mu_1)^{p+2}} + t_2^2 \frac{\gamma(\alpha_1 \mu_1 t_2, p+1)}{(\alpha_1 \mu_1)^{p+1}} \right\}}{(\alpha_1 \mu_1 - \alpha_2 \mu_2)^{s+\alpha_2 i}} \\
& \times (-1)^{s+\alpha_2 i} (s + \alpha_2 i - 1)! \tag{H.4.18}
\end{aligned}$$

である.