<南山経営研究　第 37 巻　第 1 号　2022 年 6 月>

難流動化資産保有に対する習慣形成型効用と主観的評価のモデル化に関する試論

赤　壁　弘　康

キーワード：難流動化資産，標準 OU 過程，Schwartz モデル，習慣形成

はじめに

伝統的経済学理論は消費こそが効用の唯一の源泉であると教える。ファイナンス理論においても，将来の利得をより大きくすることで将来の消費（したがって効用）をより大きくするためになされる経済行動として，金融商品取引を考察する。ファイナンスではさらに，考察を精緻化するため，HARA 族効用関数に基づく期待効用理論や，消費ベースの ICAPM（Consumption-based Intertemporal Capital Asset Pricing）の理論が開発された。金融商品は概ね市場が整っており，資産としては流動性が高いことが特徴である。金融商品は，いつ購入したものであれ，そのときの金融商品の市場価格で基本的に売却できる。

しかしひとびとは，金融商品のみで資産形成するわけではない。土地・建物などの不動産はもちろん，貴金属や宝飾品などほとんど経年劣化しない耐久性を有する財（nonperishable goods）も購入するが，これらを直接消費することで効用を得ることはできないため，一種の資産（あるいは財産）とみなすことが適当である。しかし，貴金属・宝飾品などの資産は市場が十分整備されていないため，金融商品や不動産と比べるとはるかに流動性が低い。貴金属取引の一例として 24K 金地金の店頭取引を取り上げる。図 1 は，大手取引業者のひとつである T 貴金属工業が公開している 24K 金の店頭取引価格データに基づいて作成した。2022 年の 24K 金取引価格推移グラフが示すように，ロシアのウクライナ軍事侵攻を契機に現物の取引価格は急騰したが，店頭小売価格と買取価格には大きな乖離（1g あたり平均 103 円程度）が見られる。

もっとも，T 貴金属工業や M マテリアルのように買取価格を明らかにしている取引業者は決して多くないのが実情であり，比較的売買市場が形成されていると考えられる金地金の取引ですら，取引業者や店舗ごとに価格が異なることは当然のこととされている。宝石などの宝飾品に至っては，仮に売却できたとしても購入時価格の 10

分の１になることも珍しくないといい[1]，事前に買取価格がいくらになるかを把握することはさらに困難である。本研究では，このように直接消費することで満足を得ることができず，売却することも容易ではない貴金属や宝飾品のような nonperishable goods を難流動化資産（poor-liquidating asset）と呼ぶことにする。

図１　T 貴金属 24K 金取引価格（円 /g）

直接消費して効用を得ることも，市場で換金するのも容易ではない難流動化資産を進んで購入するひとが存在するのはなぜか。それは，こうした難流動資産を保有しているというだけでひとびとが何らかの満足を得ているからに違いない。こうした資産の保有者のなかでも，有限時間内に（買取価格が取得時価格を大きく割り込んでいたとしても）資産を処分しようとするひとがいる一方，途中で処分することなく家内で後世へ引き継ぐことを選択するひとも存在する。また，貴金属や宝飾品が資産・財産の性質を持っていると認識していても，自ら進んではこうした難流動化資産を入手しようとしないひとが存在することも事実である。

1）　日本経済新聞「価格差 23 倍も 宝石の買い取り価格はこんなに違う 都内周辺 20 店，記者が調査」（筒井亘記者 2015 年 6 月 26 日）より。筒井記者は「売りに行く際の心構えとして，買い取り価格に過度な期待をしないことだ。特にバブル期以前は，そもそも宝飾品の店頭価格が高かった。（中略）大枚をはたいて買った思い出の宝石に価値などつけずに，家内で後世へ引き継ぐのも選択肢かもしれない」と結論する。

こうした難流動化資産を保有することでもたらされる効用を分析対象とする伝統的経済学やファイナンスの先行研究は，残念ながら浅学寡聞にして，筆者にはほとんど探し出すことができていない。そこで，本研究は先行研究によらずに，こうした資産保有者の行動について，「思い出」などの情緒的理由ではなく[2)]，一定の合理的根拠を与えるモデルを提案しようとするものである。この目的のため，第１節のモデル設定において，難流動化資産保有に対する主観的評価とそれにもとづく資産保有効用水準に関して，異なる２種類のモデルを提案した。いずれのモデルも，資産保有の効用水準がその資産の主観的評価に影響を与え，次にそれによって効用水準が変化する，という点が共通である。これは，ある種の習慣形成[3)] であるといえる。この２種類のモデルにおいて期待効用と期待累積効用を考察した。この共通点によって，モデルの確率的数学構造も類似したものになっている（第２節）が，得られる分析結果は異なる（第３節）。この分析によって，途中で処分することなく資産保有を続けることを選択するひと（モデル１のθが十分大きい場合，モデル２の期待累積効用のケース１の場合），有限時間内に資産を処分しようとするひと（モデル２の期待効用），自ら進んではこうした難流動化資産を購入しようとはしないひと（モデル１のθが相対的に低い場合，モデル２の期待累積効用のケース２の場合），のそれぞれの行動を論理的に説明できた。

1　モデル設定

資産の市場取引価値X：資産保有者は，$t=0$で資産を購入後，その資産がどのような価値変動を起こすか（どのような価格で販売されるか）を表すベンチマークとしてこの情報を利用する。本研究では，単純化のためにこれを，リスク中立確率測度のもとで，以下のようなブラック・ショールズ型確率微分方程式の解として与えられるものとする。

$$dX_t = \rho X_t dt + \sigma_X X_t dB_t^X, \quad X_0 = x > 0 \tag{1}$$

$0<\rho<1$は無リスク資産収益率（一定），σ_Xは定数であり，$\rho - \sigma_X^2/2 > 0$とする[4)]。(B_t^X)は確率空間$(\Omega, \mathbb{Q}, \mathfrak{F})$上の標準ブラウン運動，$\mathbb{Q}$は無リスク資産の下でのリスク中立確率とする。したがって，割引かれた市場取引価格$(\tilde{X}_t)$，$X_t e^{-\rho t}$は$\mathbb{Q}$ - 指数マルチンゲールである。

2）　もちろん筆者は，難流動化資産保有に関して，「思い出」などの情緒・感情が重要な動機になっていることを否定するものではない。

3）　池田（2003）を参照のこと。

4）　ρ，σが%オーダーであれば，$\sigma_X^2/2$は$(\%)^2$オーダーである。したがってρがきわめて低く，同時にσがきわめて大きいという場合以外は，この条件が満たされる可能性は高いと考えられる。

効用関数：効用関数を$U(x)=\log x,\ x>0$とする。この対数効用関数$U(x)=\log x,\ x>0$はxに関して増加凹な HARA 族である。実際，絶対的リスク回避度$A(x)$に関して

$$A(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}=\frac{1}{x}>0,\quad A'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

となって，望ましい HARA 族効用関数の性質を満たしている。時刻tにおけるベンチマーク効用水準u_t^Xと資産の主観的評価にもとづく効用水準u_t^Yは，この効用関数$U(\cdot)$を介して，それぞれ

$$u_t^X=U(X_t/x)=\log X_t-\log x,\quad u_t^Y=U(Y_t/x)=\log Y_t-\log x$$

で与えられるものとする。効用水準が主観的評価Y（市場取引価格X）と取得時価値xの比で定義されているので，ある時刻の瞬間的効用u_t^Y，u_t^Xは無名数であり負値を取ることが許される。

資産の主観的評価Yと資産保有の効用水準u^Yの相互作用：資産の保有者は事前に買取価格を知ることはできず，市場取引価格Xのみが観察可能であるとする。資産保有者は，時刻$t>0$まで資産を保有しつづけていることから得られる効用水準u_t^Yをもとに，Xからtにおける主観的評価Y_tを推定するものとする。本研究では，基本的アイデアと確率的数学構造が共通する，ふたつの異なるモデルを考察する。

【モデル 1】主観的評価$\tilde{Y}$は，資産の現在の取引価格Xを，取得時（$t=0$）から現在tまでの保有資産の効用水準(u_t^Y)と客観的割引率ρの加重平均で割り引くことによって与えられるものとする[5)]。

$$\tilde{Y}_t=X_t\exp\left[-\left(\int_0^t(\theta u_s^Y+(1-\theta)\rho)ds\right)\right]\quad(0<\theta\leq 1)$$

このモデルでは，過去から現在までの累積効用が資産の主観的評価$\tilde{Y}$に影響を及ぼし，その$\tilde{Y}$が効用水準u_t^Yに影響を与える。これは習慣形成型効用の定式化の特殊例となっている。$\theta=0$であれば資産の主観的評価$\tilde{Y}$はXの客観的割引価値に等しいが，期待効用u^Yへのフィードバックが生じないので，$\theta>0$とする。反対に$\theta=1$であれば，客観的割引率に一切依存せず，資産の保有者は自身の判断のみで主観的評価$\tilde{Y}$を形成することになる。資産保有によって時刻tまでに十分大きなプラスの累積効用が得られておれば，主観的評価をある意味過大評価していることになり，Xを客観的割引ρより大きく割り引いて主観的評価を調整する。反対に，市場取引価値Xに比して主観的評価$\tilde{Y}$を過小評価しているならば，主観的評価を適当に調整すべく割引率をρより低く（場合によっては全体でマイナスの割引率となるように）設定す

5）　このモデルの基本的アイデアは赤壁他（2015）に採用されている。

る。これがこのモデル１の基本的な想定である。

したがって

$$d\tilde{Y}_t = dX_t \exp\left[-\left(\theta\int_0^t u_s^Y ds + (1-\theta)\rho t\right)\right] - (\theta u_t^Y + (1-\theta)\rho)X_t \exp\left[-\left(\theta\int_0^t u_s^Y ds + (1-\theta)\rho t\right)\right]dt$$

であるので[6)]

$$d\tilde{Y}_t = \theta\tilde{Y}_t(\rho - u_t^Y)dt + \sigma_X\tilde{Y}_t dB_t^X, \quad \tilde{Y}_0 = x \tag{2}$$

【モデル２】モデル１のように資産の現在の取引価格Xが主観的評価$\tilde{Y}$を通じて期待効用に間接的にフィードバックするのではなく，資産の現在の取引価格Xが主観的評価Yに直接影響を与える可能性を考慮するため，(Y_t)は以下の確率微分方程式で与えられるものとする[7)]。

$$dY_t = \lambda Y_t(u_t^X - u_t^Y)dt + \sigma_Y Y_t dW_t, \quad Y_0 = x \tag{3}$$

ただし，u_t^Yは時刻$t=0$で資産を購入した後保有し続けることにもとづく，時刻tにおける瞬間的効用水準を表し，λは定数で$0<\lambda<1$とする。u_t^Xは仮に時刻tで同じ資産を手に入れたときに得られるベンチマーク効用水準を表す。$(u_t^X - u_t^Y)$を主観的評価の調整因子であると考えれば，λはYの期待収益率とみなすことができるのでρとの相違はそれほど大きくはならないと考えられるが，ρとの大小関係をアドホックに設定できない。(W_t)は標準ブラウン運動であるが，(B_t^X)とは相関を有するものと考えるべきであろう。そこで，相関係数を$-1\leq\alpha\leq 1$，上記の確率基底のもとで(B_t^X)とは独立な標準ブラウン運動を(B_t^0)とし

$$W_t = \sqrt{1-\alpha^2}B_t^0 + \alpha B_t^X$$

とする。各時刻tにおいて$\mathbb{E}(W_t)=0$，$\mathbb{E}(W_t^2)=t^2$である正規分布に従うので，(W_t)は標準ブラウン運動である。ボラティリティ係数σ_Yは定数で正とする。

6）　このモデルはSchwartz（1997）が紹介しているコモディティ・プライスの動的確率モデルのひとつである。河本 / 津崎（2008）は

$$d\log S_t = \alpha(\theta_t - \log S_t)dt + \sigma dB_t$$

を用いてLNG取引のオプション的評価を行っている。この河本 / 津崎モデルは一見すると（2）式とは異なっているが，変数変換によって（2）式と同等となるので，Schwartzモデルの一種といえる。

7）　このモデルは，赤壁･竹澤（2021a）が用いている拡張Schwartzモデルを，さらに確率バージョンに発展させたものとなっている。

モデル 1，2 の共通点は，資産保有の効用水準がその資産の主観的評価に影響を与え，次にそれによって効用水準が変化する，という点である。ただし，モデル 1 の主観的評価 $\tilde{Y}_t$ は一種の“割引”価値である。このため，モデル 2 では期待効用や期待累積効用を客観的割引率 ρ で割引く必要がない[8)]。他方，モデル 2 の資産の主観的評価 Y_t は時刻 t における絶対額であるので，期待効用や期待累積効用を計算する際は，客観的割引率 ρ で割引く必要がある。

2　準備的考察：資産保有に関する効用，累積効用

2.1　モデル 1

（2）式において，過程 $(\tilde{Y}_t)$ の 2 次変分 $\langle \tilde{Y} \rangle_t$ の増分が $d\langle \tilde{Y} \rangle_t = \sigma_X^2 \tilde{Y}_t^2 dt$ であることに注意すれば，伊藤の公式より

$$du_t^Y = \frac{d\tilde{Y}_t}{\tilde{Y}_t} - \frac{d\langle \tilde{Y} \rangle_t}{2\tilde{Y}_t^2} = \left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2} - \theta u_t^Y\right) dt + \sigma_X dB_t^X, \quad u_0^Y = 0 \tag{4}$$

を得る[9)]。上式（4）の解は両辺を時間積分して

$$u_t^Y = \left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right) t - \theta \int_0^t u_s^Y ds + \sigma_X B_t^X$$

となるが

$$u_t^Y = \left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right) \frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta} + \sigma_X e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dB_s^X$$

と表現できることは容易にわかる。実際

$$\begin{aligned} du_t^Y &= \left[\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right) e^{-\theta t} - \theta \sigma_X e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dBs\right] dt + \sigma_X dB_t^X \\ &= \left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2} - \theta u_t^Y\right) dt + \sigma_X dB_t^X \end{aligned}$$

となって，（4）式を得る。したがって，時刻 t までの累積効用と効用水準はそれぞれ

$$\int_0^t u_s^Y ds = \frac{1}{\theta} \left[\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\left(t - \frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta}\right) + \sigma_X \left(B_t^X - O_t^{B,\theta}\right)\right] \tag{5}$$

$$u_t^Y = \left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right) \frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta} + \sigma_X O_t^{B,\theta} \tag{6}$$

によって与えられる。ただし

---

8)　もちろん期待値演算 $\mathbb{E}$ は測度 $\mathbb{Q}$ のもとで実施される。以下同様である。

9)　ファイナンスの分野では（4）式は短期利子率の Vasicek モデルとして知られている。

$$O_t^{B,\theta} = e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta s} dB_s^X$$

で定義される確率過程$(O_t^{B,\theta})$は標準 OU 過程と呼ばれ

$$dO_t^{B,\theta} = -\theta O_t^{B,\theta} dt + dB_t^X$$

を満たす。周知のとおり[10)]，標準 OU 過程$(O_t^{B,\theta})$は以下のように標準ブラウン運動(B_t^X)の時間変更で表すことができる。

$$O_t^{B,\theta} = e^{-\theta t} B_\tau^X, \quad \tau = \frac{e^{2\theta t}-1}{2\theta}$$

実際，$d\tau = e^{2\theta t}dt$，$dB_\tau^X = e^{\theta t} dB_t^X$であることから，伊藤の補題によって

$$dO_t^{B,\theta} = -\theta e^{-\theta t} B_\tau^X dt + e^{-\theta t} dB_\tau^X = -\theta O_t^{B,\theta} dt + dB_t^X$$

となって，上記の確率微分方程式が得られる。したがって$\mathbb{E}(O_t^{B,\theta}) = 0$である。

2.2　モデル２

$Z_t \equiv u_t^Y - u_t^X = \log Y_t - \log X_t$とする。このとき

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{dY_t}{Y_t} - \frac{d\langle Y\rangle_t}{2Y_t^2} - \frac{dX_t}{X_t} + \frac{d\langle X\rangle_t}{2X_t^2} \\ &= -(\lambda Z_t + \beta)dt + \sigma_Y dW_t - \sigma_X dB_t^X,\ \beta \equiv \frac{\sigma_Y^2}{2} + \rho - \frac{\sigma_X^2}{2} > 0,\ Z_0 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

したがって

$$Z_t = -\beta t - \lambda \int_0^t Z_s ds + \sigma_Y W_t - \sigma_X B_t^X$$

ここで，$\alpha = 1$，$\sigma_X = \sigma_Y$（B_XとZが完全正相関し，資産保有者が資産の主観的評価において市場取引のボラティリティをそのまま利用する）とすれば，Z_tは確定的に変化し

$$Z_t = \frac{\beta}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1) < 0$$

となって，$u_t^Y \le u_t^X$ (w.p.1)となることに注意しておこう。

また，モデル１と同様に，(7) 式の解が

10)　この事実は Feller（1996，p. 324）によって報告されている。標準 OU 過程については例えば Ikeda-Watanabe（1981）を参照のこと。

$$Z_t = -\frac{\beta}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) + \sigma_Y e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dW_s - \sigma_X e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dB_s^X$$

のように表現できることは，両辺の時間微分によって（7）式が導かれることからわかる。実際

$$\begin{aligned} dZ_t &= \left(-\beta e^{-\lambda t} - \lambda\sigma_Y e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dW_s + \lambda\sigma_X e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dB_s^X\right)dt + \sigma_Y dW_t - \sigma_X dB_t^X \\ &= -(\lambda Z_t + \beta)dt + \sigma_Y dW_t - \sigma_X dB_t^X \end{aligned}$$

したがって

$$\lambda\int_0^t Z_s ds = -\beta\left(t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right) + \sigma_Y\left(W_t - e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dW_s\right) - \sigma_X\left(B_t^X - e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dB_s^X\right)$$

ここで標準 OU 過程$O_t^{W,\lambda} = e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dW_t$とすれば

$$dO_t^{W,\lambda} = -\lambda O_t^{W,\lambda} dt + dW_t, \quad O_0^{W,\lambda} = 0$$

となり，以下のように標準ブラウン運動(W_t)の時間変更で表すことができる。

$$O_t^{W,\lambda} = e^{-\lambda t} W_\tau, \quad \tau = \frac{e^{2\lambda t}-1}{2\lambda}$$

実際，$d\tau = e^{2\lambda t} dt$，$dW_\tau = e^{\lambda t} dW_t$であることから[11)]，伊藤の補題によって

$$dO_t^{W,\lambda} = -\lambda e^{-\lambda t} W_\tau dt + e^{-\lambda t} dW_\tau = -\lambda O_t^{W,\lambda} dt + dB_t^X$$

となって，上記の確率微分方程式が得られる。(B_t^X)に対する標準OU過程$O_t^{B,\lambda} = e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} dB_s^X$についても同様である。したがって,$\mathbb{E}(O_t^{W,\lambda}) = \mathbb{E}(O_t^{B,\lambda}) = 0$である。

このとき，以上のことから

$$\begin{aligned} Z_t &= -\beta t - \lambda\int_0^t Z_s ds + \sigma_Y W_t - \sigma_X B_t^X \\ &= -\beta\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} - \sigma_Y(W_t - O_t^{W,\lambda}) + \sigma(B_t^X - O_t^{B,\lambda}) \end{aligned}$$

ベンチマーク効用水準u_t^Xは

$$u_t^X = \left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t + \sigma_X B_t^X$$

11）　したがって

$$\int_0^t e^{\lambda s} dW_s = W_\tau, \quad \tau = \frac{e^{2\lambda t}-1}{2\lambda}$$

であることがわかる。

であるので，u_t^Y の明示的表現は $u_t^Y = u_t^X + Z_t$ により得られる。

同様に，(7) から

$$d(e^{-\rho t}Z_t) = -(\lambda+\rho)e^{-\rho t}Z_t dt - \beta e^{-\rho t}dt + \sigma_Y e^{-\rho t}dW_t - \sigma_X e^{-\rho t}dB_t^X$$

であるので，累積効用 $\int_0^t e^{-\rho s}u_s^Y ds$ は

$$\int_0^t e^{-\rho s}Z_s ds = -\frac{1}{\lambda+\rho}\left[e^{-\rho t}Z_t + \beta\frac{1-e^{-\rho t}}{\rho} - \sigma_Y\int_0^t e^{-\rho s}dW_s + \sigma_X\int_0^t e^{-\rho s}dB_s^X\right]$$

より得られる。

モデル 1，2 の背景にあるアイデアは異なるが，以上のことから推測されるように，両モデルの効用水準 u^Y の確率的数学構造は類似したものになる。このため，習慣形成型効用の特徴をより反映しているのはモデル 1 の u^Y であるが，本研究ではモデル 2 による u^Y も習慣形成型効用の一種とみなすことにする。

3　期待効用と期待累積効用

3.1　モデル 1

先に記述したように，効用水準 u_t^Y がその時点の絶対額である主観的評価 Y_t に依存するモデル 2 とは違い，モデル 1 の主観的評価 $\tilde{Y}_t$ は一種の“割引”価値である。このため，モデル 1 では資産保有に関する期待効用を客観的割引率 ρ で割引く必要がない。したがって，$(\tilde{Y}_t)$ にもとづく期待効用は $\mathbb{E}(u_t^Y)$ で定義されることになる。資産保有者の目的は資産保有の期待効用 $\mathbb{E}(u_t^Y)$ をできるだけ大きくすることにあるとする。$\mathbb{E}(u_t^Y)$ が最大になるタイミングが存在するのであれば，保有者はその瞬間に資産を手放すことを検討すべきであると考えられる。しかし，2.1 節の考察によって次の命題が成り立つ。

命題 1. 主観的評価の割引ウェイト θ が十分大きく $1 \geq \theta > \sigma_X^2/2\rho$ であるとき，(6) より，モデル 1 の主観的評価 $(\tilde{Y}_t)$ にもとづく資産保有の期待効用 $\mathbb{E}(u_t^Y)$ は時間 t に関して非負単調増加で

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(u_t^Y) = \rho - \frac{\sigma_x^2}{2\theta} > 0$$

ある。したがって，難流動性資産の保有者が期待効用 $\mathbb{E}(u_s^Y)$ をできるだけ大きくする目的で資産保有する場合，資産保有者はいったん手に入れた資産を有限時間内で処分すべきではない。反対に，割引のウェイト θ が比較的小さく $0 < \theta \leq \sigma_X^2 x/2\rho$ であるとき

$$\mathbb{E}(u_t^Y) \leq 0$$

であるので，当初から資産を入手しないことが望ましい。

次に，モデル１の主観的評価 $(\tilde{Y}_t)$ にもとづく資産保有の期待累積効用 $\mathbb{E}(\int_0^t u_s ds)$ が最大になるタイミングが存在するか否かを考察することにする。$\mathbb{E}(\int_0^t u_s ds)$ が最大になるタイミング存在するのであれば，保有者はその瞬間に資産を手放すべきであると考えられる。しかし，以上のモデル１の設定の下では，次の命題が成り立つ。

命題 2. 難流動性資産の保有者が期待累積効用をできるだけ大きくする目的で資産保有する場合，割引のウェイト θ が十分大きく $1 \geq \theta > \sigma_X^2/2\rho$ であるとき，期待累積効用 $\mathbb{E}(\int_0^t u_s ds)$ が最大になるタイミングは存在しない。すなわち，難流動性資産の保有者が，期待累積効用をできるだけ大きくする目的で資産保有する場合，有限時間内で資産を手放すことは最適ではない。反対に，割引のウェイト θ が比較的小さく $0 < \theta \leq \sigma_X^2/2\rho$ であるとき，当初から資産を入手しないことが望ましい。

証明. 2.1 節の（5）式，すなわち

$$\int_0^t u_s^Y ds = \frac{1}{\theta}\left[\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\left(t - \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta}\right) + \sigma_X\left(B_t^X - O_t^{B,\theta}\right)\right]$$

より

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s ds\right) = \frac{1}{\theta}\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\left(t - \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta}\right)$$

両辺を時間微分すれば

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s ds\right) = \frac{1}{\theta}\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)(1-e^{-\theta t})$$

したがって $\theta > \sigma_X^2/2\rho$ のとき，ゼロからスタートする資産保有の期待累積効用は非負かつ時間に関して $+\infty$ にむかって単調増加となる。したがって，期待累積効用を大きくすることを目的とする限り，保有者は任意の有限時間 $t < \infty$ 内で資産を処分しないことが望ましい。反対に $\theta \leq \sigma_X^2/2\rho$ であるとき，期待累積効用は非正単調減少となるため，当初から資産を入手しないことが望ましい。

モデル１が示唆するのは，客観的割引よりも主観的評価をより重視する個人は，難流動性資産を入手したうえで有限時間内に資産を処分しない可能性があるということである。

3.2　モデル２

上述したように，モデル２の資産の主観的評価 Y_t は時刻 t における絶対額であるので，(Y_t) にもとづく期待効用は $\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$ で定義されることになる。資産保有者は期待効用 $\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$ をできるだけ大きくすることを目的とするとする。$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$ が最大になるタイミングが存在するのであれば，保有者はその瞬間に資産を手放すことを検討すべきであると考えられる。モデル２の設定では，2.2 節の準備から次の命題が成り立つ。

命題 3. モデル 2 の主観的評価にもとづく資産保有の期待効用 $\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$ は，ある有限時刻 $t = t^{**}$

$$t^{**} = \underset{t\in[0,\infty)}{\arg\max}\,\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y) > \frac{1}{\rho}$$

で最大値を取り, 以降ゼロにむかって減少する。典型的には以下の図 2 のようになる。したがって，難流動性資産の保有者が期待効用をできるだけ大きくする目的で資産保有する場合，当該資産を $t = 0$ で購入した保有者は $t = t^{**}$ までは保有し続け，t^{**} で資産を処分することを検討すべきである。

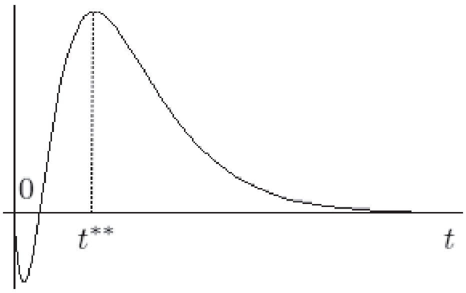

図２　モデル２の期待効用 $\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$ の時間的変化

証明の概略を付録に記す。

$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$ の最大値 max とそれを与える $t^{**} = \arg\max$ の値について，数値計算結果を示しておく。この数値計算結果から，資産の市場取引と主観的評価のボラティリティ σ_x，σ_Y について，同じ ρ，λ の値に対して $\sigma_Y > \sigma_X$ のときの方が最大値 max は大きいが，$t^{**} = \arg\max$ は長くなることが見て取れる。また，λ の値が小さければ，max の値はゼロに近く，arg max の値は大きくなる。したがって，たとえ最大値 max が存在するとしても，$t = 0$ で当該資産を入手するべきか否か，慎重に検討する必要があるといえる。

仮に max $= 0.01$ とすれば，資産の主観的評価値の最大値 Y は $Y \simeq 1.010x > x$ であるので，購入時価値 x をわずかに上回った段階で即座に処分を検討すべきということになる。また，max $= 0.22$ とすると $1.24x < Y < 1.25x$ であるので，評価値が最大になるのを待って長期間保有し続けたとしても最大値 Y は購入価格 x の 25％増に満たない。

$\sigma_X^2/2 = 0.002,\ \sigma_Y^2/2 = 0.005$

	$\rho = 0.01$		$\rho = 0.02$		$\rho = 0.03$	
λ	max	arg max	max	arg max	max	arg max
0.002	0.000710	643.077	0.000542	313.382	0.000407	207.782
0.005	0.019897	332.572	0.014239	166.859	0.010628	111.837
0.01	0.067207	229.875	0.050144	120.116	0.038397	81.934
0.02	0.133751	173.695	0.109487	94.639	0.088195	66.053
0.03	0.172170	151.893	0.150407	84.034	0.125945	59.392
0.04	0.196341	139.870	0.179542	77.654	0.154875	55.258
0.05	0.212735	132.238	0.201109	73.261	0.177576	52.307

$\sigma_X^2/2 = 0.005,\ \sigma_Y^2/2 = 0.002$

	$\rho = 0.01$		$\rho = 0.02$		$\rho = 0.03$	
λ	max	arg max	max	arg max	max	arg max
0.002	0.001978	475.392	0.003646	192.626	0.003270	122.454
0.005	0.021036	272.439	0.024206	125.038	0.019969	82.567
0.01	0.053445	203.357	0.057604	102.083	0.047859	69.381
0.02	0.093746	161.731	0.106050	86.624	0.092014	60.491
0.03	0.116040	144.199	0.138272	78.931	0.124450	55.857
0.04	0.129829	134.183	0.160945	73.914	0.149080	52.671
0.05	0.139084	127.717	0.177619	70.308	0.168317	50.268

次に，資産保有者の行動指標は期待累積効用 $\mathbb{E}(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds)$ であるとする。$\mathbb{E}(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds)$ が最大になるタイミングが存在するのであれば，保有者はその瞬間に資産を手放すことを検討すべきであると考えられる。しかし,次の命題が成り立つ。

命題 4. モデル 1 の主観的評価にもとづく資産保有の期待累積効用 $\mathbb{E}(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds)$ は，$t = 0$ のときゼロから減少し，極小値を取った後増加に転じる。ここで λ と ρ の大小関係が

$$\lambda > \rho \frac{\sigma_Y^2/2\rho}{1 - \sigma_X^2/2\rho} \qquad (\text{ケース 1})$$

であるとき，プラスの値

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds\right) = \frac{1}{\rho(\lambda+\rho)}\left[\left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right) - \beta\right] > 0$$

に収束する（図 3.1)。したがって，難流動性資産の保有者が，期待累積効用

$\mathbb{E}(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds)$ をできるだけ大きくする目的で資産保有する場合，いったん手に入れた資産を有限時間内で処分すべきではない。反対に

$$\lambda \leq \rho \frac{\sigma_Y^2/2\rho}{1-\sigma_X^2/2\rho} \qquad \text{（ケース 2）}$$

のとき，$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds\right)$ は非正の値に収束する（図 3.2）ので，難流動性資産の保有者が期待累積効用 $\mathbb{E}(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds)$ をできるだけ大きくする目的で資産保有するのであれば，当初から資産を入手すべきではない。

モデル 2 の期待累積効用 $\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds\right)$

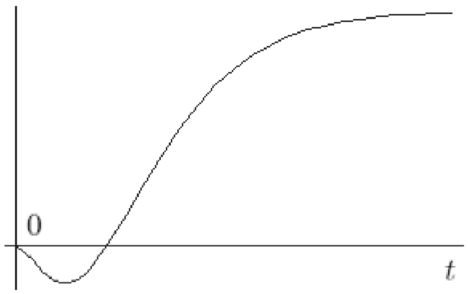

図 3.1 （ケース 1）

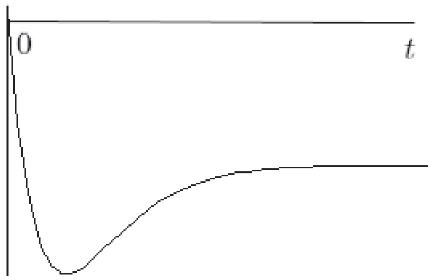

図 3.2 （ケース 2）

命題 3 との関連で

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds\right) = e^{-\rho t}\left[\left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t - \beta\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right] = \mathbb{E}(e^{-\rho t} u_t^Y)$$

であるので，命題 4 の初めに示した時間的変化については説明の必要がない。命題 3 の数値例の範囲では，例えば $\rho = 0.03$，$\sigma_Y^2/2 = 0.005$，$\sigma_X^2 = 0.002$ のとき，$\lambda < 0.005$ であれば $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\rho s} u_s^Y ds\right)$ は負の値をとる。

4　モデル 1 再考：主観的評価の期待値 $\mathbb{E}(\tilde{Y}_t)$ と命題 1，2 との関係性

2 節の（5）より

$$\theta \int_0^t u_s^Y ds = \left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\left(t - \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta}\right) + \sigma_X\left(B_t^X - O_t^{B,\theta}\right)$$

であるから，$X_t = xe^{(\rho-\sigma_X^2/2)t+\sigma_X B_t^X}$ であることを思い出せば

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{Y}_t) &= \mathbb{E}\left[X_t \exp\left(-\theta\int_0^t u_s^Y ds - (1-\theta)\rho t\right)\right] \\
&= x\mathbb{E}\left\{\exp\left[-\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\left(t - \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta}\right) - \sigma_X(B_t^X - O_t^{B,1}) - (1-\theta)\rho t\right]\right. \\
&\qquad \left.\times \exp\left[\left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t + \sigma_X B_t^X\right]\right\} \\
&= x\mathbb{E}\left\{\exp\left[\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\frac{1-e^{-\theta t}}{\theta} + \sigma_X O_t^{B,\theta}\right]\right\}
\end{aligned}$$

ここで

$$O_t^{B,\theta} = e^{-\theta t}B_\tau^X, \quad \tau = \frac{e^{2\theta t}-1}{2\theta}$$

であり，(aB_t^X)のラプラス変換が

$$\mathbb{E}\left(e^{aB_t^X}\right) = e^{a^2 t/2}$$

であることを利用すれば，モデル 1 による資産の主観的評価$\tilde{Y}_t$の期待値は

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{Y}_t) &= x\exp\left[\left(\rho\theta - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\frac{1-e^{-\theta t}}{\theta} + \frac{\sigma_X^2}{2}\frac{1-e^{-2\theta t}}{2\theta}\right] \\
&= x\exp\left[\left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{4\theta}\right) - \left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2\theta}\right)e^{-\theta t} - \frac{\sigma_X^2}{4\theta}e^{-2\theta t}\right]
\end{aligned}$$

となる。命題 1，2 の条件$1 \geq \theta > \sigma_X^2/2\rho$すなわち$\rho - \sigma_X^2/2\theta > 0$であるとき，$\rho - \sigma_X^2/4\theta = (\rho - \sigma_X^2/2\theta) + \sigma_X^2/4\theta > 0$であるので，$e^{-\theta t} \equiv T \in (0,1]$として最右辺の指数関数$[\,\cdot\,]$内を$g(T)$とすれば

$$g(T) = -\frac{\sigma_X^2}{4\theta}T^2 - \left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2\theta}\right)T + \left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{4\theta}\right) \geq 0, \quad g(1) = 0$$

となり，$\mathbb{E}(\tilde{Y}_t) \geq x = \mathbb{E}(\tilde{X}_t)$，すなわち，資産の主観的評価の期待値は常に原資産の割引かれた市場取引価値の期待値を上回ることがわかる。この結果は，「保有者は有限時間内に資産を手放さすべきではない」という命題 1，2 の結論と整合的である。

反対に，$\theta \leq \sigma_X^2/2\rho < 1$すなわち$\rho - \sigma_X^2/2\theta < 0$であり，かつ，$\rho - \sigma_X^2/4\theta \leq 0$であるとき，$g(T) \leq 0$となるので$\mathbb{E}(\tilde{Y}_t) \leq x = \mathbb{E}(\tilde{X}_t)$であるので，資産の主観的評価の期待値は，原資産の割引かれた市場取引価値の期待値を上回ることはない。この結果は，「保有者は初めから資産を入手すべきではない」という命題 1，2 の結論と整合的である。

しかし，$\rho - \sigma_X^2/4\theta > 0 \geq \rho - \sigma_X^2/2\theta$であるとき，$g(T) \geq 0$となるので$\mathbb{E}(\tilde{Y}_t) \geq x = \mathbb{E}(\tilde{X}_t)$であるが，「保有者ははじめから資産を入手すべきではない」という命題 1，2 の結論を支持しない。これは命題 1，2 が，資産の主観的評価の期待

値 $\mathbb{E}(\tilde{Y}_t)$ ではなく，期待効用 $\mathbb{E}(u_t^Y)$ を指標としたためであると考えられる。これは，資産の主観的評価の期待値 $\mathbb{E}(\tilde{Y}_t)$ からは資産購入に十分値するように見えても，期待効用にもとづけばより慎重に行動すべきだということを示しており，期待効用を行動指標とする意味がある。

まとめにかえて

本研究は，難流動化資産に関して，途中で処分することなく資産保有を続けることを選択するひと，有限時間内に資産を処分しようとするひと，自ら進んではこうした難流動化資産を購入しようとはしないひとのそれぞれの行動を，（思い出などの情緒的理由ではなく）論理的に説明するための主観的評価とそれにもとづく習慣形成型効用モデルの試案を提案した。

ただし，本研究の潜在的資産保有者の行動指標はあくまで期待効用・期待累積効用であり，資産処分時にどれだけの買取価格で処分可能かは考察の対象外となっている。買取価格の如何によっては，期待効用・期待累積効用に関しては途中で処分することなく資産保有を続けることを選択するひとも，早期処分を検討する方が有利な場合も起こり得る。これはある種のアメリカン・タイプのリアルオプションになり十分考察に値する問題であるが，稿を改めて検討することにしたい。

付録：命題の証明

命題 3 の証明の概略.

$$\mathbb{E}(e^{-\rho t}Z_t) = -\frac{\beta}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})e^{-\rho t}, \quad \frac{d}{dt}\mathbb{E}(e^{-\rho t}Z_t) = \frac{\beta}{\lambda}e^{-\rho t}(\rho-(\lambda+\rho)e^{-\lambda t})$$

であるので，$\mathbb{E}(e^{-\rho t}Z_t)$ は $t=0$ のときゼロから出発し，$t=t_1=(1/\lambda)\log(1+\lambda/\rho)$ まで減少（$t=t_1$ のとき最小値

$$\mathbb{E}(e^{-\rho t_1}Z_{t_1}) = -\frac{\beta}{\lambda+\rho}\left(1+\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\rho/\lambda} < 0$$

をとる），以降はゼロに向かって増加する。他方，ベンチマーク期待効用 $\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^X)$ は

$$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^X) = e^{-\rho t}\left(\rho-\frac{\sigma_X^2}{2}\right)t, \quad \frac{d}{dt}\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^X) = e^{-\rho t}\left(\rho-\frac{\sigma_X^2}{2}\right)(1-\rho t)$$

であるので，$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^X)$ は $t=0$ のときゼロから出発し，$t=t_2=1/\rho$ までは増加（$t=t_2$ のとき最大値

$$\mathbb{E}(e^{-\rho t_2}u_{t_2}^X) = \left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)\frac{1}{e\rho} > 0$$

をとる），以降はゼロに向けて減少する。$x > 0$のとき$x > \log(1+x)$であるので

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\lambda}\log\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right) > \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{\rho} = 0$$

であるので，$t_2 > t_1$である。資産保有の期待効用$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$は

$$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y) = \mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^X) + \mathbb{E}(e^{-\rho t}Z_t) = e^{-\rho t}\left[\left(\rho - \frac{\sigma_X^2}{2}\right)t - \beta\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]$$

である。上式最右辺[ ]内は$t = 0$のときゼロからスタートし，$t = -(1/\lambda)\log[(\rho - \sigma_X^2/2)/\beta] > 0$のとき最小値をとり，以降は$+\infty$にむかって増加に転じる。したがって，$t$が十分大きいときは正値をとる。したがって，パラメータを含んだまま$\underset{t\in[0,\infty)}{\arg\max}\,\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$を陽に表現することは困難であるが，$\mathbb{E}(e^{-\rho t}u_t^Y)$は$t = 0$のときゼロからスタートし，$(0, t_1)$のある時刻$t^*$で負の最小値を，$(t_2, \infty)$のある時刻$t^{**}$で正の最大値を取り，以降正の値からゼロに収束することがわかる。

参考文献

Bjerksund, P. and Ekern S. (1995) "Contingent Claims Evaluation of Mean＝reverting Cash Flows in Shippin," in L. Trigeorgis (eds), *Real Options in Capital Investment: Models, Strategy, and Applications,* Praeger Pub., Chp. 12, 207–219.

Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Vol. 2, Wiley.（国沢清典監訳（1970）『確率論とその応用 II』（上・下）紀伊国屋書店）

Ikeda, N. and Watanabe, S. (1981) *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes,* Kodansha, North-Holland.

Schwartz, E. S. (1997) "The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging," *Journal of Finance,* 53(3), 923–73.

Vasicek, O. (1977) "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure," *Journal of Financial Economics,* 5, 177–188.

赤壁弘康・竹澤直哉（2021）「コロナ禍後の人口減少観光地を対象とした観光サービス利用制限政策のリアルオプション的評価」『リアルオプション研究』（日本リアルオプション学会），13，1–19.

赤壁弘康（2021）「短期利子率モデルの背景にある確率過程とブラウン運動の時間変更に関する覚書」『南山経営研究』，36（1），125–140.

赤壁弘康・田畑吉雄・竹澤直哉（2015）「リアルオプション・アプローチによる不確実性下の観光事業者意思決定―確率的 Verhulst/Gompertz 方程式を満たす将来の貨幣的満足をもとに―」『日本観光学会誌』（日本観光学会），56，1–16.

赤壁弘康，田畑吉雄（2010b）「価格がネットワーク外部性の影響を受ける資産 / 商品に対するデリバティブの評価，ヘッジと複製戦略について」『現代ファイナンス』（日本ファイナンス学会），

28, 17–43.
池田新介（2003）「合理的習慣形成の理論」『現代経済学の潮流 2003』（小野善康編）東洋経済新報社
河本薫・津崎賢治（2008）：“LNG 取引におけるオプション価格理論の活用 ”，『オペレーションズ・リサーチ』，53（7），377–84.
田畑吉雄・赤壁弘康（2014）「確率的 Verhulst-Gompertz 過程のもとでの変動型行使価格を持つアジアオプション」『グローバル経営学会誌』，2，9–16.