多群2次元正規分布モデルにおける すべての相関係数の多重比較法とその応用

横山 颯，安田 竜規，白石 高章*

Multiple Comparisons among All Correlation Coefficients in Multi-Sample Bivariate Models

Hayate Yokoyama, Tatsuki Yasuda, Taka-aki Shiraishi

観測値が分散共分散行列が未知の 2 次元正規分布に従う k 標本モデルを考える．k 個の相関係数の同時信頼区間，シングルステップのすべての相関係数の多重比較検定，閉検定手順に基づくマルチステップの多重比較検定について提案する．最後に，データ解析の例として，動物の全長と寿命の相関係数を解析する．

1　はじめに

観測値が未知の分散で同一である必要のない正規分布に従う k 群モデルにおけるすべての平均の多重比較法が白石 (2011) によって論じられている．また分布が未知であっても解析が可能なノンパラメトリックなすべての平均の多重比較法も白石 (2011) は論じている．前者は t 統計量を使い，後者はウィルコクソンの符号付順位統計量がつかわれた．この研究では観測値が 2 次元正規分布に従う k 標本モデルを考える．1 標本 2 次元正規分布モデルの相関係数の解析にはフィッシャーの z 変換による統計量が使われる．この z 変換による統計量の漸近正規性は Anderson (2003) に書かれているが，それとは異なる証明を本稿では与える．これを基に，分散共分散行列が未知の 2 次元正規分布に従う k 標本モデルにおける相関係数を多重比較する手法について提案する．k 個の相関係数の同時信頼区間，シングルステップのすべての相関係数の多重比較検定，マルチステップの多重比較検定である．最後に，データ解析の例として，脊椎動物の全長と寿命の相関係数を解析する．

2　モデルと多重比較検定法によって解析される仮説

k 群モデルで $1 \leqq i \leqq k$ となる整数 i に対して，第 i 群の標本 $(X_{i1}, Y_{i1}), \cdots, (X_{in_i}, Y_{in_i})$ は同一の 2 次元正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ に従うものとする．ただし，$\boldsymbol{\mu}_i$ は未知の平均ベクトルで $\boldsymbol{\mu}_i \equiv (\mu_{i1}, \mu_{i2})$，$\boldsymbol{\Sigma}_i$ は未知の分散共分散行列で $\boldsymbol{\Sigma}_i \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{i1}^2 & \rho_i\sigma_{i1}\sigma_{i2} \\ \rho_i\sigma_{i1}\sigma_{i2} & \sigma_{i2}^2 \end{pmatrix}$ とする．さらにすべての (X_{ij}, Y_{ij}) $(j = 1, \cdots, n_i;\ i = 1, \cdots, k)$ は互いに独立であると仮定する．総標本サイズを $n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ とおく．　次の k 群モデルの表 2.1 を得る．

$\mathcal{I}_k$ を

$$\mathcal{I}_k \equiv \{i |\ 1 \leqq i \leqq k,\ i \text{ は整数 }\} \tag{2.1}$$

とする．まずは $\{\rho_i |\ i \in \mathcal{I}_k\}$ に対する同時信頼区間を提案する．比較のための検定は, $i = 1, \cdots, k$

*南山大学理工学部，E-Mail: marble@nanzan-u.ac.jp

表 2.1. k 群モデル

群	サイズ	データ	相関係数
第 1 群	n_1	$(X_{11}, Y_{11}), \cdots, (X_{1n_1}, Y_{1n_1})$	ρ_1
第 2 群	n_2	$(X_{21}, Y_{21}), \cdots, (X_{2n_2}, Y_{2n_2})$	ρ_2
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 k 群	n_k	$(X_{k1}, Y_{k1}), \cdots, (X_{kn_k}, Y_{kn_k})$	ρ_k

総標本サイズ: $n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ （すべての観測値の個数）
$\rho_1, \cdots, \rho_k$ はすべて未知母数とする.

に対して, ある $\rho_{0i} \in (-1, 1)$ を与えたときに, 帰無仮説 $H_{0i} : \rho_i = \rho_{0i}$ に対して 3 種の対立仮説

① 両側対立仮説 $H_{0i}^{A\pm}$: $\rho_i \neq \rho_{0i}$

② 片側対立仮説 H_{0i}^{A+} : $\rho_i > \rho_{0i}$

③ 片側対立仮説 H_{0i}^{A-} : $\rho_i < \rho_{0i}$

を考える．$\left\{ \text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A*} \mid i \in \mathcal{I}_k \right\}$ に対する多重比較検定を提案する．ただし，H_{0i}^{A*} は $H_{0i}^{A\pm}$，H_{0i}^{A+}，H_{0i}^{A-} のうちのいずれかとする．さらに，閉検定手順についても考察する．

3 基礎となる漸近理論

ρ_i の点推定量は，

$$\hat{\rho}_i \equiv \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2}}$$

で与えられ，標本相関係数とよばれている．

補題 3.1 $n_i \to \infty$ として，

$$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, (1 - \rho_i)^2\right) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ただし，$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ は法則収束を表す.

証明 一般性を失うことなく $\mu_{i1} = \mu_{i2} = 0$, $\sigma_{i1} = \sigma_{i2} = 1$ と仮定する．
第 i 群の標本標準偏差 $\hat{\sigma}_{i1}$，$\hat{\sigma}_{i2}$, 標本共分散 $\hat{\sigma}_{i12}$ は

$$\hat{\sigma}_{i1} \equiv \sqrt{\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}, \quad \hat{\sigma}_{i2} \equiv \sqrt{\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2},$$

$$\hat{\sigma}_{i12} \equiv \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})$$

で与えられる．$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i)$ は，$\hat{\sigma}_{1i}$, $\hat{\sigma}_{i2}, \hat{\sigma}_{i12}$ を使用して

$$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{i1}\hat{\sigma}_{i2}}\sqrt{n_i}\left(\hat{\sigma}_{i12} - \rho_i\right) + \frac{\rho_i}{\hat{\sigma}_{i1}}\sqrt{n_i}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{i2}} - 1\right) + \rho_i\sqrt{n_i}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{i1}} - 1\right) \tag{3.2}$$

と表現できる．白石 (2012a) より，$(Z_{11}, Z_{21}), \cdots, (Z_{1n_i}, Z_{2n_i})$ を n_i 個の独立で同一の 2 次元正規分布 $\mathrm{N}_2\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_2\right)$ に従う確率ベクトルで,

$$X_{ij} = Z_{1j}, \quad Y_{ij} = \rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j} \tag{3.3}$$

と表現できる．関数 $g(x)$ を $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ で定義すると，$g'(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$ が成り立つ．平均値の定理より，

$$g'(a_{n_i}) = \frac{g(\hat{\sigma}_{i1}^2) - g(1)}{\hat{\sigma}_{i1}^2 - 1} = \frac{1/\hat{\sigma}_{i1} - 1}{\hat{\sigma}_{i1}^2 - 1}, \tag{3.4}$$

$$g'(b_{n_i}) = \frac{g(\hat{\sigma}_{i2}^2) - g(1)}{\hat{\sigma}_{i2}^2 - 1} = \frac{1/\hat{\sigma}_{i2} - 1}{\hat{\sigma}_{i2}^2 - 1} \tag{3.5}$$

$$|a_{n_i} - 1| < |\hat{\sigma}_{i1}^2 - 1|, \quad |b_{n_i} - 1| < |\hat{\sigma}_{i2}^2 - 1|$$

を満たす a_{n_i}，b_{n_i} が存在する．大数の法則より，$\hat{\sigma}_{i1}^2 \xrightarrow{P} \mathrm{V}(X_i) = 1$ であることより，

$$g(\hat{\sigma}_{i1}^2) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{i1}} \xrightarrow{P} g(1) = 1 \tag{3.6}$$

を得る．ただし，$\xrightarrow{P}$ は確率収束を表す．同様に，

$$g(\hat{\sigma}_{i2}^2) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{i2}} \xrightarrow{P} g(1) = 1 \tag{3.7}$$

が成り立つ．$a_{n_i} \xrightarrow{P} 1$, $b_{n_i} \xrightarrow{P} 1$ より

$$g'(a_{n_i}) \xrightarrow{P} -\frac{1}{2} \tag{3.8}$$

$$g'(b_{n_i}) \xrightarrow{P} -\frac{1}{2} \tag{3.9}$$

を得る．(3.3), (3.4), (3.8) より，

$$\rho_i \sqrt{n_i} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{i1}} - 1 \right) = -\frac{\rho_i}{2} \sqrt{n_i} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Z_{1j}^2 - 1 \right) + o_p(1) \tag{3.10}$$

と表現される．ただし，$o_p(1)$ は 0 に確率収束する項を表す．(3.3), (3.5), (3.6), (3.9) より，

$$\frac{\rho_i}{\hat{\sigma}_{i1}} \sqrt{n_i} \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{i2}} - 1 \right) = -\frac{\rho_i}{2} \sqrt{n_i} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ (\rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j})^2 - 1 \right\} + o_p(1) \tag{3.11}$$

が成り立つ．(3.3) より，同様に

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{i1}\hat{\sigma}_{i2}} \sqrt{n_i} (\hat{\sigma}_{i12} - \rho_i) = \sqrt{n_i} \left\{ \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Z_{1j} (\rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j}) - \rho_i \right\} + o_p(1) \tag{3.12}$$

を得る．

(3.2), (3.10)-(3.12) より，$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i)$ は

$$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i) = \sqrt{n_i} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ Z_{1j} (\rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j}) - \frac{\rho_i}{2} (\rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j})^2 - \frac{\rho_i}{2} Z_{1j}^2 \right\} + o_p(1) \tag{3.13}$$

と表現できる，

$$\begin{aligned} V_j &\equiv Z_{1j} (\rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j}) - \frac{\rho_i}{2} (\rho_i Z_{1j} + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{2j})^2 - \frac{\rho_i}{2} Z_{1j}^2 \\ &= (1-\rho_i^2) \left(\frac{\rho_i}{2} Z_{1j}^2 + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_{1j} Z_{2j} - \frac{\rho_i}{2} Z_{2j}^2 \right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

とおく．このとき，(3.13) は

$$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i) = \sqrt{n_i}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} V_j + o_p(1) \tag{3.15}$$

と表される．$\mathrm{E}(Z_{1j}^4) - 3 = \mathrm{E}(Z_{2j}^4) - 3 = 0$ と Z_{1j}，Z_{2j} は互いに独立であるので，

$$\mathrm{E}(V_j) = (1-\rho_i^2)\mathrm{E}\left(\frac{\rho_i}{2}Z_{1j}^2 + \sqrt{1-\rho_i^2}Z_{1j}Z_{2j} - \frac{\rho_i}{2}Z_{2j}^2\right) = (1-\rho_i^2)\left(\frac{\rho_i}{2} - \frac{\rho_i}{2}\right) = 0,$$

$$\mathrm{V}(V_j) = \mathrm{E}\left[(1-\rho_i^2)^2\left(\frac{\rho_i}{2}Z_{1j}^2 + \sqrt{1-\rho_i^2}Z_{1j}Z_{2j} - \frac{\rho_i}{2}Z_{2j}^2\right)^2\right] = (1-\rho_i^2)^2$$

となる．中心極限定理より,

$$\sqrt{n_i}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} V_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{N}\left(0, (1-\rho_{\mathrm{i}}^2)^2\right) \tag{3.16}$$

が成り立つ.

(3.15), (3.16) より，結論を得る． □

$0 < r < 1$ となる r に対して,

$$\mathcal{Z}_T(r) \equiv \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \tag{3.17}$$

とおく． 清水 (2020) などにより，$\mathcal{Z}_T(r)$ は Fisher の z 変換とよばれている．

つぎの命題 3.2 を得る．

命題 3.2 $n_i \to \infty$ として,

$$\sqrt{n_i - 3}\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$$

が成り立つ．ただし，$Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ は確率変数 Z_i が標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うことを意味している．

証明

$$\mathcal{Z}_T'(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1-r}\right) = \frac{1}{1-r^2} \tag{3.18}$$

である．確率変数 W は $N\left(0,\ (1-\rho^2)^2\right)$ に従う確率変数とし，(3.18) より，補題 3.1 とデルタ法を用いて

$$\begin{aligned}\sqrt{n_i - 3}\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\} &= \frac{\sqrt{n_i - 3}}{\sqrt{n_i}}\sqrt{n_i}\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{n_i-3}}{\sqrt{n_i}}\frac{1}{1-\rho_i^2}W = \frac{1}{1-\rho_i^2}W \sim \mathrm{N}(0,1)\end{aligned}$$

を得，結論が導かれた. □

命題 3.2 は Anderson (2003) にも証明とともに掲載されているが，補題 3.1 を用いる上記は Anderson (2003) とは別証明になっている．法則収束，デルタ法などの漸近理論は白石 (2012a) を参照すること．

4　多重比較法

$i=1,\cdots,k$ に対して

$$T_i(r) \equiv \sqrt{n_i-3}\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)-\mathcal{Z}_T(r)\}$$

とおく．この論文を通して，

$$\lim_{n\to\infty}\min\{n_1,n_2,\cdots n_k\}=\infty \tag{c.1}$$

を仮定する．ただし，$\min A$ は集合 A の要素の最小値を表す．

このとき，命題 3.2 より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\max_{1\leqq i\leqq k}|T_i(\rho_i)|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)\right)&=\prod_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(|T_i(\rho_i)|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)\right)\\&=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{P}\left(|Z_i|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

ただし，$z(\beta)$ は $N(0,1)$ の上側 $100\beta\%$ 点を表すものとする．

$Z_i\sim N(0,1)$ より，

$$\mathrm{P}\left(|Z_i|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)\right)=1-2\cdot\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}=(1-\alpha)^{1/k}\tag{4.2}$$

を得る．(4.1) と (4.2) より，

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\max_{1\leqq i\leqq k}|T_i(\rho_i)|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)\right)=1-\alpha$$

が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\max_{1\leqq i\leqq k}T_i(\rho_i)\leqq z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)\right)&=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{P}\left(Z_i\leqq z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)\right)\\&=1-\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで定理 4.1 を得る．

定理 4.1　$n\to\infty$ として，条件 (c.1) の下で，

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\max_{1\leqq i\leqq k}|T_i(\rho_i)|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)\right)=1-\alpha,\tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\max_{1\leqq i\leqq k}T_i(\rho_i)\leqq z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)\right)=1-\alpha\tag{4.4}$$

が成り立つ．□

$\mathcal{Z}_T(r)=\tanh^{-1}r$ の関係と $\tanh(x)$ は狭義の増加関数より，

$$|T_i(\rho_i)|\leqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)$$

は

$$\tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)-\frac{z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right)\leqq\rho_i\leqq\tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)+\frac{z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right)$$

と同等である．また，

$$T_i(\rho_i) \leqq z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)$$

は

$$\tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \frac{z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right) \leqq \rho_i$$

と同等である．

ここで，ρ_i $(i=1,\cdots,k)$ についての信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間はつぎで与えられる．

[4.1] $\{\rho_i|\ i \in \mathcal{I}_k\}$ **に対する信頼係数** $1-\alpha$ **の同時信頼区間**

母数 ρ_i の制約に応じて, 信頼係数 $1-\alpha$ の漸近的な同時信頼区間は次の (1) から (3) で与えられる．

(1) 両側信頼区間： 任意の $i \in \mathcal{I}_k$ に対して，

$$\tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \frac{z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right) \leqq \rho_i \leqq \tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) + \frac{z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right)$$

(2) 上側信頼区間： 任意の $i \in \mathcal{I}_k$ に対して，

$$\tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \frac{z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right) \leqq \rho_i$$

(3) 下側信頼区間： 任意の $i \in \mathcal{I}_k$ に対して，

$$\rho_i \leqq \tanh\left(\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) + \frac{z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)}{\sqrt{n_i-3}}\right).$$

□

[4.1] の同時信頼区間から，シングルステップの多重比較検定がつぎで与えられる．

[4.2] 水準 α **のシングルステップの多重比較検定**

母数 ρ_i の制約に応じて, 水準 α の多重比較検定は次の (1) から (3) で与えられる．

(1) $\left\{\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A\pm} \mid i \in \mathcal{I}_k\right\}$ の両側検定：

$|T_i(\rho_{0i})| \geqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/k}}{2}\right)$ となる i に対して帰無仮説 H_{0i} を棄却し対立仮説 $H_{0i}^{A\pm}$ を受け入れ，$\rho_i \neq \rho_{0i}$ と判定する．

(2) $\left\{\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A+} \mid i \in \mathcal{I}_k\right\}$ の片側検定：

$T_i(\rho_{0i}) \geqq z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)$ となる i に対して帰無仮説 H_{0i} を棄却し対立仮説 H_{0i}^{A+} を受け入れ，$\rho_i > \rho_{0i}$ と判定する．

(3) $\left\{\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A-} \mid i \in \mathcal{I}_k\right\}$ の片側検定：

$T_i(\rho_{0i}) \leqq -z\left(1-(1-\alpha)^{1/k}\right)$ となる i に対して帰無仮説 H_{0i} を棄却し対立仮説 H_{0i}^{A-} を受け入れ，$\rho_i < \rho_{0i}$ と判定する．

□

すべての帰無仮説 H_{0i} $(i \in \mathcal{I}_k)$ を多重比較検定するときのファミリーは $\mathcal{H}_0 \equiv \{H_{0i} \mid i \in \mathcal{I}_k\}$ である．$\mathcal{H}_0$ の要素の仮説 H_{0i} の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}}_0 \equiv \left\{ \bigwedge_{i \in E} H_{0i} \;\middle|\; \emptyset \subsetneqq E \subset \mathcal{I}_k \right\}$$

で表される．ここで水準 α のマルチステップの多重比較検定としてつぎの閉検定手順が提案できる．

[4.3] 水準 α のマルチステップの多重比較検定

空でない任意の $E \subset \mathcal{I}_k$ に対して, 帰無仮説 $H_0(E)$ を

$$H_0(E):\ \text{任意の } i \in E \text{ に対して } \rho_i = \rho_{0i} \tag{4.5}$$

で定義すると，

$$\bigwedge_{i \in E} H_{0i} = H_0(E) \tag{4.6}$$

が成り立つ.

閉検定手順は，特定の帰無仮説を $H_{0i_0} \in \mathcal{H}_0$ としたとき，$i_0 \in E \subset \mathcal{I}_k$ を満たす任意の E に対して帰無仮説 $H_0(E)$ の検定が水準 α で棄却された場合に，H_{0i_0} を棄却する方式である.

$\ell \equiv \ell(E) \equiv \#(E)$,

$$E \equiv \{i_1, \cdots, i_\ell\} \quad (i_1 < \cdots < i_\ell)$$

とおき，以下に帰無仮説 $H_0(E)$ に対する水準 α の漸近的検定方法を具体的に論述する.

(1) $\left\{\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A\pm} \mid i \in \mathcal{I}_k\right\}$ の両側検定：

$\max_{i \in E} |T_i(\rho_{0i})| \geqq z\left(\frac{1-(1-\alpha)^{1/\ell}}{2}\right)$ ならば $H_0(E)$ を棄却する.

(2) $\left\{\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A+} \mid i \in \mathcal{I}_k\right\}$ の片側検定：

$\max_{i \in E} T_i(\rho_{0i}) \geqq z\left(1-(1-\alpha)^{1/\ell}\right)$ ならば $H_0(E)$ を棄却する.

(3) $\left\{\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ vs. 対立仮説 } H_{0i}^{A-} \mid i \in \mathcal{I}_k\right\}$ の片側検定：

$\min_{i \in E} T_i(\rho_{0i}) \leqq -z\left(1-(1-\alpha)^{1/\ell}\right)$ ならば $H_0(E)$ を棄却する.

5　データの解析例

Web の文献 [8]-[10] を用いて，脊椎動物における各種属の寿命と全長を調べた．このデータを基に相関係数を解析する．X を寿命 [年], Y を全長 [cm] とみなした．標本サイズは表 5.1 で与えられ，標本の中に人間は含まれていない.

表 5.1 脊椎動物の標本サイズ

群	第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群
種族	爬虫類	両生類	哺乳類	鳥類
標本サイズ	121	46	297	45

$k = 4,\ n_1 = 121,\ n_2 = 46,\ n_3 = 297,\ n_4 = 45$ として [4.1], [4.2] の手法を用いる.

(1) $\alpha = 0.05,\ \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = \rho_{04} = 0$ としたとき

[4.1] の (1) の手法を用いて，95% 同時信頼区間は

$$0.01 \leqq \rho_1 \leqq 0.43,\quad 0.43 \leqq \rho_2 \leqq 0.84,\quad 0.62 \leqq \rho_3 \leqq 0.77,\quad 0.11 \leqq \rho_4 \leqq 0.71$$

であった．また，[4.2] の (1) の手法を用いて，水準 0.05 の多重比較両側検定ですべての帰無仮説は棄却された.

以上から，すべての群に正の相関があることが分かった.

(2) $\alpha = 0.05,\ \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = \rho_{04} = 0.5$ としたとき

95% 同時信頼区間は上記の (1) と同じで水準 0.05 の多重比較両側検定で　帰無仮説 $H_{01}:\ \rho_{01} = 0.5$ と $H_{03}:\ \rho_{03} = 0.5$ が棄却された．

以上から，第 1 群の相関係数 ρ_1 は $0 < \rho_1 < 0.5$, 第 1 群の相関係数 ρ_1 は $0.5 < \rho_3 < 1.0$ であることが分かった．

どの種族も寿命と全長には正の相関があると考えられる. 特に哺乳類が強い相関を示し，爬虫類は他の種族より相関が弱いことが分かった．哺乳類に関して, 人間に比べてクジラなど全長が何メートルに及ぶ生き物でさえ 60 年も生きないことと, この強い相関が見られることは, 人間が全長に対して寿命が異常に長いことを表している. 爬虫類と鳥類に関して両側信頼区間の幅が広いのは, 亀などの全長が小さくて寿命が長い生き物であったり, ペリカンなどの全長が大きくて寿命が短い生き物がいることによるとも考えられる.

6　おしまいに

観測値が未知の分散で同一である必要のない正規分布に従う k 群モデルにおけるすべての平均の多重比較法が白石 (2011) によって論じられている．また分布が未知であっても解析が可能なノンパラメトリックなすべての平均の多重比較法も白石 (2011) は論じている．これらの多群モデルでは分散が不均一の未知であっても解析がおこなえる手法である．多群ベルヌーイモデルですべての比率の多重比較法は白石 (2012b) と Shiraishi (2022) によって与えられている．また，ポアソンモデルと指数モデルはそれぞれ白石 (2012b) と白石 (2013) に与えられている．いずれも平均母数の多重比較法である．ここでの内容は相関係数の多重比較法を述べた初めての論文である．

謝辞

本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C)(課題番号 18K11204) 及び 2022 年度南山大学パッヘ研究奨励金 I-A-2 の援助を受けたものである．

参考文献

[1] Anderson, T. W. (2003). *An introduction to multivariate statistical analysis. Third Edition.* Wiley, New York

[2] Shiraishi, T. (2022). *Multiple Comparisons for Bernoulli Data.* Springer.

[3] 清水邦夫 (2020). 『相関係数』 近代科学社.

[4] 白石高章 (2011). 『多群連続モデルにおける多重比較法—パラメトリック, ノンパラメトリックの数理統計』 共立出版.

[5] 白石高章 (2012a). 『統計科学の基礎—データと確率の結びつきがよくわかる数理』 日本評論社.

[6] 白石高章. (2012b). 多群の 2 項モデルとポアソンモデルにおけるすべてのパラメータの多重比較法. 日本統計学会和文誌, 42 巻　pp.55-90.

[7] 白石高章. (2013). 多群指数モデルにおける平均パラメータの多重比較法. 計量生物学，34 巻 pp.1-20.

[8] 『爬虫類図鑑』https://hatyu.info/ 2022 年 12 月 20 日参照.

[9] 『Private Zoo Garden』https://pz-garden.stardust31.com/jyumyou.html 2022 年 12 月 20 日参照

[10] 『万物の寿命まるわかり事典』http://www.lance4.net/banbutuno-jumyo/aa-rank-bird.html 2022 年 12 月 20 日参照