多群2次元正規分布モデルにおける相関係数相違の多重比較法

白石 高章*

Pairwise Multiple Comparisons for Correlation Coefficients in Multi-Sample Bivariate Models

Taka-aki Shiraishi

観測値が未知の分散で同一である正規分布に従う k 群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較法が白石 (2011a) によって論じられている．また，対照群との平均相違の多重比較法は白石 (2011b) によってレビューされている．正規分布の下で平均に順序制約のある場合の母平均の多重比較法は白石・杉浦 (2018) によってレビューされている．ここでは観測値が 2 次元正規分布に従う k 標本モデルを考える．フィッシャーの z 変換を基に，分散共分散行列が未知の 2 次元正規分布に従う k 標本モデルにおける相関係数の相違を多重比較する手法について提案する．提案される手法は，k 個の相関係数の差の同時信頼区間，相関係数相違に対するシングルステップの多重比較検定，マルチステップの多重比較検定である．

キーワード: 多重比較法，Tukey-Kramer 法，Dunnett 法，閉検定手順，漸近理論

1　はじめに

分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおけるすべての平均差の多重比較法が，Tukey (1953) と Kramer (1956) によって提案され，現在では Tukey-Kramer 法とよばれている． 2 群間の t 検定統計量を $t_{ii'}$ とするとき，$\max_{i<i'} |t_{ii'}|$ の分布が，スチューデント化された範囲の $\sqrt{2}$ 倍の統計量の分布によって下から抑えられることを，Hayter (1984) は示した．Tukey-Kramer 法を優越するマルチステップ法を白石 (2011a) は提案している．Ramsey (1978) の総対検出力による比較において，白石 (2011a) の手法がテューキー・クレーマーの方法よりも 37% (37 パーセント) もよくなる場合があることをシミュレーションにより白石・杉浦 (2018) の表 6.1 で検証した．

対照群との多重比較法は Dunnett (1955) によって提案され，多くの統計書に紹介されている．平均母数に順序制約のある場合の多重比較法は Hayter (1990), 白石 (2014), 白石・松田 (2016) によって提案され，これらの内容は白石・杉浦 (2018), Shiraishi et al. (2019) にレビューされている．順序制約のある場合のこれらの手法は，順序制約のないモデルの多重比較法を大きく優越する．ベルヌーイ分布に従うデータに対する比率の多重比較法の理論が Shiraishi (2022) にレビューされている．

この研究では，$i = 1, \cdots, k$ に対して各 i 群の第 j 番目の標本観測値が相関係数 ρ_i の 2 次元正規分布に従うと仮定する． このとき，$\rho_1, \cdots, \rho_k$ の間の相違に関しての多重比較法について順序制約のない場合とある場合について論じる．

2　モデルと基礎極限分布

k 群モデルで $1 \leqq i \leqq k$ となる整数 i に対して，第 i 群の標本 $(X_{i1}, Y_{i1}), \cdots, (X_{in_i}, Y_{in_i})$ は同一の 2 次元正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ に従うものとする．ただし，$\boldsymbol{\mu}_i$ は未知の平均ベクトルで $\boldsymbol{\mu}_i \equiv (\mu_{i1}, \mu_{i2})$， $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は未知

*南山大学理工学部，E-Mail: marble@nanzan-u.ac.jp

の分散共分散行列で $\mathbf{\Sigma}_i \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{i1}^2 & \rho_i\sigma_{i1}\sigma_{i2} \\ \rho_i\sigma_{i1}\sigma_{i2} & \sigma_{i2}^2 \end{pmatrix}$ とする．さらにすべての (X_{ij}, Y_{ij}) $(j = 1, \cdots, n_i;\ i = 1, \cdots, k)$ は互いに独立であると仮定する．総標本サイズを $n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ とおく． 次の k 群モデルの表 2.1 を得る．

表 2.1 k 群モデル

群	サイズ	データ	相関係数
第 1 群	n_1	$(X_{11}, Y_{11}), \cdots, (X_{1n_1}, Y_{1n_1})$	ρ_1
第 2 群	n_2	$(X_{21}, Y_{21}), \cdots, (X_{2n_2}, Y_{2n_2})$	ρ_2
$\vdots$	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 $k-1$ 群	n_{k-1}	$(X_{k-11}, Y_{k-11}), \cdots, (X_{k-1n_{k-1}}, Y_{k-1n_{k-1}})$	ρ_{k-1}
第 k 群	n_k	$(X_{k1}, Y_{k1}), \cdots, (X_{kn_k}, Y_{kn_k})$	ρ_k

総標本サイズ: $n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ （すべての観測値の個数）
$\rho_1, \cdots, \rho_k$ はすべて未知母数とする．

このとき，ρ_i の点推定量は，

$$\hat{\rho}_i \equiv \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2}}$$

で与えられ，標本相関係数とよばれている．横山ら (2023) により，$n_i \to \infty$ として，

$$\sqrt{n_i}(\hat{\rho}_i - \rho_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, (1 - \rho_i)^2\right) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし，$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ は法則収束を表す．$0 < r < 1$ となる r に対して，

$$\mathcal{Z}_T(r) \equiv \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + r}{1 - r}\right) \tag{2.2}$$

とおく． $\mathcal{Z}_T(r)$ は Fisher の z 変換とよばれている．このとき，横山ら (2023) は，(2.1) とデルタ法を使うことにより，

$$\sqrt{n_i - 3} \cdot \{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_i \sim N(0, 1) \tag{2.3}$$

を示した． もっと一般論から，Anderson (2003) は，(2.3) の主張を横山ら (2023) とは異なる別証明を与えている．

この論文を通して，

(c.1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n} = \lambda_i > 0 \ \ (1 \leqq i \leqq k)$$

を仮定する．

3 Tukey-Kramer 型のシングルステップ法

1 つの比較のための検定は

$$\text{帰無仮説 } H_{(i,i')}:\ \rho_i = \rho_{i'} \text{ vs. 対立仮説 } H_{(i,i')}^A:\ \rho_i \neq \rho_{i'}$$

となる. 便宜上, 一様性の帰無仮説を

$$H_0:\ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k$$

とする．

$$S \equiv \sum_{i=1}^{k}(n_i - 3)\left\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{n_j}{n}\right)\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_j)\right\}^2 \tag{3.1}$$

とおくと，(2.3) と白石 (2012) の定理 3.23 により，H_0 の下で, $n \to \infty$ として，

$$S \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{k-1} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

定数 α $(0 < \alpha < 1)$ をはじめに決める．$1 \leqq i < i' \leqq k$ を満たすすべての (i, i') に対して, 水準 α で同時に行う検定が, 水準 α の Tukey-Kramer 型多重比較検定法である．

$$\mathcal{U}_k \equiv \{(i, i') \mid 1 \leqq i < i' \leqq k\}. \tag{3.3}$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{\rho} \equiv (\rho_1, \cdots, \rho_k)$ と $(i, i') \in \mathcal{U}_k$ に対して

$$T_{i'i}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \frac{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \{\mathcal{Z}_T(\rho_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\}}{\sqrt{\frac{1}{n_i - 3} + \frac{1}{n_{i'} - 3}}} \tag{3.4}$$

とおく．

Hayter (1984) の定理と白石 (2011b) の定理 A.6 を使ってつぎの定理 3.1 を得る．

定理 3.1　条件 (c.1) の下で，$t > 0$ に対して，

$$A(t|k) \leqq \lim_{n \to \infty} P\left(\max_{(i,i') \in \mathcal{U}_k} |T_{i'i}(\boldsymbol{\rho})| \leqq t\right) \leqq A^*(t|k, \boldsymbol{\lambda}), \tag{3.5}$$

が成り立つ．ただし，

$$A(t|k) \equiv k \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(x) - \Phi(x - \sqrt{2} \cdot t)\}^{k-1} d\Phi(x), \tag{3.6}$$

$$A^*(t|k, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \cdot x\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \cdot x - \sqrt{\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_j}} \cdot t\right)\right\} d\Phi(x) \tag{3.7}$$

とおき，$\Phi(x)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数とし, $\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ とする．

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k \tag{3.8}$$

のとき (3.5) 式の両方の等号が成り立つ．　□

$$T_{i'i} \equiv T_{i'i}(\mathbf{0}) = \frac{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)}{\sqrt{\frac{1}{n_i - 3} + \frac{1}{n_{i'} - 3}}}$$

とおくと，定理 3.1 より，H_0 の下で

$$A(t|k) \leqq \lim_{n \to \infty} P_0\left(\max_{(i,i') \in \mathcal{U}_k} |T_{i'i}| \leqq t\right) \leqq A^*(t|k, \boldsymbol{\lambda}), \tag{3.9}$$

ただし，$P_0(\cdot)$ を H_0 の下での確率測度とする．α を与え，方程式

$$A(t|k) = 1 - \alpha \tag{3.10}$$

を満たす t を $a(k; \alpha)$ とおく．$a(k; \alpha)$ の数表が，白石・杉浦 (2018) の付表 3 に載せられている．このとき，(3.9) 式より，次の保守的な多重比較検定法が導かれる．

[3.1] 漸近的な多重比較検定法

{ 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ vs. 対立仮説 $H^A_{(i,i')}$ | $(i,i') \in \mathcal{U}_k$} に対する水準 α の多重比較検定は,
『 $i < i'$ となるペア i,i' に対して $|T_{i'i}| \geqq a(k;\alpha)$ ならば, 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却し, 対立仮説 $H^A_{(i,i')}$ を受け入れ, $\rho_i \neq \rho_{i'}$ と判定する 』
ことである. □

(3.5) より,

$$1-\alpha = A(a(k;\alpha)|k) \leqq \lim_{n\to\infty} P\,(\text{すべての } (i,i') \in \mathcal{U}_k \text{ に対して } |T_{i'i}(\boldsymbol{\rho})| \leqq a(k;\alpha))$$

であるので，つぎの保守的な漸近的同時信頼区間を得る.

[3.2] 漸近的な同時信頼区間

$\{\mathcal{Z}_T(\rho_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i) \mid (i,i') \in \mathcal{U}_k\}$ に対する信頼係数 $1-\alpha$ の漸近的同時信頼区間は,
すべての $(i,i') \in \mathcal{U}_k$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - a(k;\alpha)\cdot\sqrt{\frac{1}{n_i-3}+\frac{1}{n_{i'}-3}} &< \mathcal{Z}_T(\rho_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\\ &< \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) + a(k;\alpha)\cdot\sqrt{\frac{1}{n_i-3}+\frac{1}{n_{i'}-3}}\end{aligned}$$

で与えられる. □

4 閉検定手順

第 3 節で考察したすべての母比率の相違を多重比較検定するときの帰無仮説のファミリーは

$$\mathcal{H}_1 = \{H_{(i,i')} \mid (i,i') \in \mathcal{U}_k\}$$

である．$\mathcal{H}_1$ の要素の仮説 $H_{(i,i')}$ の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}}_1 = \left\{ \bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}} \,\middle|\, \emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{U}_k \right\}$$

で表され，$\overline{\mathcal{H}}_1$ を $\mathcal{H}_1$ の閉包と呼んでいる．$\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}} H_{\boldsymbol{v}}$ は一様性の帰無仮説 H_0 となる．さらに $\emptyset$ でない $V \subset \mathcal{U}$ に対して

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}} \ :\ \text{任意の } (i,i') \in V \text{ に対して}, \rho_i = \rho_{i'}$$

は k 個の母比率に関していくつかが等しいという仮説となる．$I_1,\cdots,I_J$ を添え字 $\{1,\cdots,k\}$ の互いに素な空でない部分集合の組とし，同じ I_j $(j=1,\cdots,J)$ に含まれる添え字をもつ母比率は等しいという帰無仮説を $H(I_1,\cdots,I_J)$ で表す．このとき，任意の $V \subset \mathcal{U}$ に対して，ある自然数 J と上記のある $I_1,\cdots,I_J$ が存在して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}} = H(I_1,\cdots,I_J) \tag{4.1}$$

が成り立つ.

$\emptyset$ でない $V_0 \subset \mathcal{U}$ に対して，すべての帰無仮説 $H_{\boldsymbol{v}}$ $(\boldsymbol{v} \in V_0)$ が真のとき，1 つ以上の帰無仮説 $H_{\boldsymbol{v}}$ $(\boldsymbol{v} \in V_0)$ を棄却する確率が α 以下となる検定方式が水準 α の多重比較検定である．この α はタイプ I FWER (type I familywise error rate) と呼ばれている．この定義の V_0 に対して，帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V_0} H_{\boldsymbol{v}}$ に

対する水準 α の検定の棄却域を A とし, 帰無仮説 $H_{\boldsymbol{v}}$ に対する水準 α の検定の棄却域を $B_{\boldsymbol{v}}$ とすると，帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V_0} H_{\boldsymbol{v}}$ の下での確率

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_{\boldsymbol{v}\in V_0} B_{\boldsymbol{v}}\right)\right) \leqq P(A) \leqq \alpha \tag{4.2}$$

が成り立つ.

閉検定手順は，特定の帰無仮説を $H_{\boldsymbol{v}_0} \in \mathcal{H}$ としたとき，$\boldsymbol{v}_0 \in V$ を満たすすべての $V\ (\subset \mathcal{U})$ に対して帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}}$ の検定が水準 α で棄却された場合に，$H_{\boldsymbol{v}_0}$ を棄却する方式である.

(4.2) より，閉検定手順による多重比較検定のタイプ I FWER が α 以下となる.

$$T(I_j) \equiv \max_{i<i',\ i,i'\in I_j} |T_{i'i}| \quad (j = 1, \cdots, J)$$

とおき，水準 α の帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}}$ に対する検定方法を具体的にいくつか論述することができる. (3.10) で k を ℓ に替えた t の解を $a(\ell;\alpha)$ とする.

[4.1] 検出力の高い手順

#(A) を集合 A の要素の個数とし，(4.1) 式で現れた $I_1, \cdots, I_J$ に対して $m \equiv m(I_1, \cdots, I_J) \equiv \sum_{j=1}^{J} \ell_j$, $\ell_j \equiv$ #(I_j) とおく.

(a) $J \geqq 2$ のとき

$\ell = \ell_1, \cdots, \ell_J$ に対して

$$\alpha(m, \ell) \equiv 1 - (1-\alpha)^{\ell/m}$$

で $\alpha(m,\ell)$ を定義する. $1 \leqq j \leqq J$ となるある整数 j が存在して $a\left(\ell_j; \alpha(m, \ell_j)\right) \leqq T(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}}$ を棄却する.

(b) $J = 1\ (m = \ell_1)$ のとき

$a\,(m;\alpha) \leqq T(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}}$ を棄却する.

(a), (b) の方法で, $(i,i') \in V$ を満たすすべての V に対して，$\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}}$ が棄却されるとき，多重比較検定として，$H_{(i,i')}$ を棄却する. □

ここで定理 4.1 を得る.

定理 4.1 [4.1] の検定は水準は α の漸近的な多重比較検定である.

証明 白石 (2011b) の定理 5.7 と同様に示せる. □

丹後・小西 (2010) で紹介されている REGW 型の方法は正規分布論の閉検定手順としてよく使われる. これの方法に沿った手法を紹介する. このために，$I\ (I \subset \{1, \cdots, k\})$ に含まれる添え字をもつ母比率は等しいという帰無仮説を $H(I)$ で表し，$\iota \equiv$ #(I) とおく. さらに，$k \geqq 4$ とし，

$$\alpha^*(\iota) \equiv \begin{cases} 1-(1-\alpha)^{\iota/k} & (2 \leqq \iota \leqq k-2) \\ \alpha & (\iota = k-1, k) \end{cases}$$

によって $\alpha^*(\iota)$ を定義する.

[4.2] REGW(Ryan-Einot-Gabriel-Welsch) 型の方法

$a\,(\iota;\alpha^*(\iota)) \leqq T(I)$ ならば帰無仮説 $H(I)$ を棄却する．この方法で $i,i' \in I$ を満たすすべての I に対して $H(I)$ が棄却されるとき，$H_{(i,i')}$ を棄却する． □

[4.1], [4.2] を実行するための $a\,(\ell;\alpha(m,\ell))$ の値の数表が白石・杉浦 (2018) の付表 4 と付表 5 に載せられている．

[4.3] χ^2 **統計量を用いた検出力の高い手順**

閉検定手順 [4.2] において，$T(I_j), T(I)$ のかわりにそれぞれ

$$S(I_j) = \sum_{i\in I_j}(n_i-3)\left\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \sum_{i'\in I_j}\left(\frac{n_{i'}}{n(I_j)}\right)\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'})\right\}^2,$$

$$S(I) = \sum_{i\in I}(n_i-3)\left\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \sum_{i'\in I}\left(\frac{n_{i'}}{n(I)}\right)\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'})\right\}^2$$

を使っても閉検定手順が行える．ただし，$n(I_j) \equiv \sum_{i\in I_j} n_i$, $n(I) \equiv \sum_{i\in I} n_i$ とおく．この場合，(3.1), (3.2) より，[4.1] の検出力の高い手順においては，$a\left(\ell_j;\alpha(m,\ell_j)\right) \leqq T(I_j)$，$a\,(m;\alpha) \leqq T(I_1)$ をそれぞれ $\chi^2_{\ell_j-1}\left(\alpha(m,\ell_j)\right) \leqq S(I_j)$，$\chi^2_{m-1}\,(\alpha) \leqq S(I_1)$ に置き換えればよい．ただし，$\chi^2_\ell\,(\alpha')$ は自由度 ℓ の χ^2 分布の上側 α' 点を表す．また，[4.2] の REGW 型の方法においては，$a\,(\iota;\alpha^*(\iota))$ を $\chi^2_{\iota-1}\,(\alpha^*(\iota))$ に置き換えればよい． □

[4.3] を実行するための $\chi^2_{\iota-1}\,(\alpha^*(\iota))$ の値の数表が白石・杉浦 (2018) の付表 6 と付表 7 に載せられている．

ここで述べた閉検定手順は第 3 節の検定法より検出力が上がる．$\ell_j = \iota = \ell$ のとき

$$1-(1-\alpha)^{\ell/m} \geqq 1-(1-\alpha)^{\ell/k}$$

の関係により，[4.1] の閉検定手順の帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}}$ に関する棄却域が [4.2] の棄却域を含むことになり，[4.1] の閉検定手順が，REGW 型の方法よりも一様に検出力が高いこととなる．

5　対照群との多重比較法

第 2 節のモデルに対応して，第 1 群を対照群とする Dunnett 型多重比較検定を論じる．第 1 群の対照群と第 i 群の処理群を比較することを考える．1 つの比較のための検定は,

$$\text{帰無仮説 } H_i:\ \rho_i = \rho_1$$

に対して 3 種の対立仮説

$$\begin{array}{lll} ① & \text{両側対立仮説 } H_i^{A\pm} & : \ \rho_i \neq \rho_1 \\ ② & \text{片側対立仮説 } H_i^{A+} & : \ \rho_i > \rho_1 \\ ③ & \text{片側対立仮説 } H_i^{A-} & : \ \rho_i < \rho_1 \end{array}$$

となる．

白石 (2011b) の補題 6.1 と同様にして，次の定理 5.1 を得る．

定理 5.1 (c.1) の仮定を満たし，

$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\max_{2\leqq i\leqq k} |T_{i1}| \leqq t\right) = B_1(t|k,\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\max_{2\leqq i\leqq k} T_{i1} \leqq t\right) = B_2(t|k,\boldsymbol{\lambda}) \tag{5.2}$$

を導くことができる. ただし，

$$B_1(t|k,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{k}\left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}}\cdot x+\sqrt{\frac{\lambda_i+\lambda_1}{\lambda_1}}\cdot t\right)-\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}}\cdot x-\sqrt{\frac{\lambda_i+\lambda_1}{\lambda_1}}\cdot t\right)\right\}d\Phi(x),$$

$$B_2(t|k,\boldsymbol{\lambda}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{k}\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}}\cdot x+\sqrt{\frac{\lambda_i+\lambda_1}{\lambda_1}}\cdot t\right)d\Phi(x).$$

□

定理 3.1 の仮定を満たすとする．$B_1(t|k,\boldsymbol{\lambda}) = 1-\alpha$ を満たす t の解を $b_1(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$，$B_2(t|k,\boldsymbol{\lambda}) = 1-\alpha$ を満たす t の解を $b_2(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$ とする．$b_1(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$，$b_2(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$ の数表が，それぞれ，白石・杉浦 (2018) の付表 2.12 と付表 2.13 に載せられている．

$$\mathcal{I}_{2,k} \equiv \{i \mid 2 \leqq i \leqq k\}. \tag{5.3}$$

とおく．このとき，定理 5.1 より，平均パラメータの制約に応じて, つぎのシングルステップ法を得る．

[5.1] シングルステップ法

水準 α の漸近的な多重比較検定は次の (1) から (3) で与えられる．

(1) 両側検定：{ 帰無仮説 H_i vs. 対立仮説 $H_i^{A\pm}| \, i\in\mathcal{I}_{2,k}\}$（母比率 $\rho_1,\cdots,\rho_k$ に制約がつけられないとき），

$|T_{i1}| \geqq b_1(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$ となる i に対して H_i を棄却し, 対立仮説 $H_i^{A\pm}$ を受け入れ, $\rho_i \neq \rho_1$ と判定する.

(2) 片側検定：{ 帰無仮説 H_i vs. 対立仮説 $H_i^{A+}| \, i\in\mathcal{I}_{2,k}\}$（制約 $\rho_2,\cdots,\rho_k \geqq \rho_1$ がつけられるとき），

$T_{i1} \geqq b_2(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$ となる i に対して H_i を棄却し, 対立仮説 H_i^{A+} を受け入れ, $\rho_i > \rho_1$ と判定する.

(3) 片側検定：{ 帰無仮説 H_i vs. 対立仮説 $H_i^{A-}| \, i\in\mathcal{I}_{2,k}\}$（制約 $\rho_2,\cdots,\rho_k \leqq \rho_1$ がつけられるとき），

$-T_{i1} \geqq b_2(k,\lambda_1,\cdots,\lambda_k;\alpha)$ となる i に対して H_i を棄却し, 対立仮説 H_i^{A-} を受け入れ, $\rho_i < \rho_1$ と判定する. □

つぎに，マルチステップの多重比較法として閉検定手順を述べる．対照群とのすべての母比率の相違を多重比較検定するときの帰無仮説のファミリーは

$$\mathcal{H}_2 \equiv \{H_2,\cdots,H_k\} = \{H_i| \, i\in\mathcal{I}_{2,k}\}.$$

である．$\mathcal{H}_2$ の要素の仮説 H_i の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}}_2 = \left\{\bigwedge_{i\in E} H_i \,\middle|\, \emptyset \subsetneqq E \subset \mathcal{I}_{2,k}\right\}$$

で表される．$E \subset \mathcal{I}_{2,k}$ に対して $\bigwedge_{i\in E} H_i$ は $k-1$ 個の母比率 $\rho_2, \cdots, \rho_k$ のうち $\#(E)$ 個が ρ_1 に等しいという仮説となる．E に含まれる添え字をもつ母比率は ρ_k に等しいという帰無仮説を $H(E)$ で表すと，

$$\bigwedge_{i\in E} H_i = H(E) \tag{5.4}$$

が成り立つ．

[5.2] マルチステップ法

閉検定手順は，特定の帰無仮説を $H_{i_0} \in \mathcal{H}_2$ としたとき，$i_0 \in E$ を満たすすべての $E\ (\subset \mathcal{I}_{2,k})$ に対して帰無仮説 $H(E)$ の検定が水準 α で棄却された場合に，H_{i_0} を棄却する方式である．

$\ell \equiv \ell(E) \equiv \#(E)$ とおき，

$$E \equiv \{i_1, \cdots, i_\ell\} \quad (2 \leqq i_1 < \cdots < i_\ell \leqq k)$$

とする．

$$B_1(t|\ell+1, E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \left\{ \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_1}} \cdot x + \sqrt{\frac{\lambda_{i_j}+\lambda_1}{\lambda_1}} \cdot t \right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_1}} \cdot x - \sqrt{\frac{\lambda_{i_j}+\lambda_1}{\lambda_1}} \cdot t \right) \right\} d\Phi(x), \tag{5.5}$$

$$B_2(t|\ell+1, E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{\ell} \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_1}} \cdot x + \sqrt{\frac{\lambda_{i_j}+\lambda_1}{\lambda_1}} \cdot t \right) d\Phi(x). \tag{5.6}$$

とおく．α を与え，

$$B_1(t_1|\ell+1, E) = 1-\alpha,\ \ B_2(t_2|\ell+1, E) = 1-\alpha$$

をみたす t_1, t_2 を，それぞれ，$b_1(\ell+1, \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha), b_2(\ell+1, \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha)$ とする．

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\max_{i\in E} |T_i| > b_1(\ell+1, \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha) \right) = \alpha,$$
$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\max_{i\in E} T_i > b_2(\ell+1, , \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha) \right) = \alpha.$$

が成り立つ．

閉検定手順は，特定の帰無仮説を $H_{i_0} \in \mathcal{H}_2$ としたとき，$i_0 \in E$ を満たすすべての $E\ (\subset \mathcal{I}_{2,k})$ に対して帰無仮説 $H(E)$ の検定が水準 α で棄却された場合に，H_{i_0} を棄却する方式である．

平均パラメータの制約に応じて, 以下に帰無仮説 $H(E)$ の検定方法を具体的に論述する．

(1) 両側検定：{ 帰無仮説 H_i vs. 対立仮説 $H_i^{A\pm} \mid i \in \mathcal{I}_{2,k}$} に対する多重比較検定のとき，
$\max_{i\in E} |T_{i1}| \geqq b_1(\ell+1, , \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha)$ ならば $H(E)$ を棄却する.

(2) 片側検定：{ 帰無仮説 H_i vs. 対立仮説 $H_i^{A+} \mid i \in \mathcal{I}_{2,k}$} に対する多重比較検定のとき，
$\max_{i\in E} T_{i1} \geqq b_2(\ell+1, , \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha)$ ならば $H(E)$ を棄却する.

(3) 片側検定：{ 帰無仮説 H_i vs. 対立仮説 $H_i^{A-} \mid i \in \mathcal{I}_{2,k}$} に対する多重比較検定のとき，
$\max_{i\in E}(-T_{i1}) \geqq b_2(\ell+1, , \lambda_1, \lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_\ell}; \alpha)$ ならば $H(E)$ を棄却する. □

6 相関係数母数に順序制約がある場合の手法

これまでは ρ_i に制限を置かなかったが, 表 2.1 のモデルで相関係数母数に傾向性の制約

$$\rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \cdots \leqq \rho_k \tag{6.1}$$

がある場合での統計解析法を論じる.

6.1 すべての相関係数相違の多重比較法

一様性の帰無仮説と対立仮説は,

$$\begin{cases} \text{帰無仮説} \quad H_0: \ \rho_1 = \cdots = \rho_k \\ \text{対立仮説} \quad H_1^{OA}: \ \rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \cdots \leqq \rho_k \ (\text{少なくとも 1 つの不等号は } <) \end{cases}$$

である. 傾向性の制約 (6.1) の下での母数 $(\rho_1, \cdots, \rho_k)$ の点推定について考察する. 制約 $u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_k$ の下で $\sum_{i=1}^k \lambda_{ni}(u_i - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i))^2$ を最小にする $\{u_i | \ i = 1, \ldots, k\}$ を $\{\hat{v}_i^* | \ i = 1, \ldots, k\}$ とする．すなわち，

$$\sum_{i=1}^k \lambda_{ni}(\hat{v}_i^* - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i))^2 = \min_{u_1 \leqq \ldots \leqq u_k} \sum_{i=1}^k \lambda_{ni}(u_i - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i))^2$$

が成り立つ．ただし，$\lambda_{ni} \equiv n_i/n \ (1 \leqq i \leqq k)$ とする．$\hat{v}_1^*, \ldots, \hat{v}_k^*$ は，Robertson et al. (1988) で述べられている pool-adjacent-violators algorithm によって与えられ，白石・杉浦 (2018) の 5.1 節に載せられている．

$$\hat{v}_i^* = \max_{1 \leqq a \leqq i} \min_{i \leqq b \leqq k} \frac{\sum_{j=a}^b \lambda_{nj} \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_j)}{\sum_{j=a}^b \lambda_{nj}} = \max_{1 \leqq a \leqq i} \min_{i \leqq b \leqq k} \frac{\sum_{j=a}^b n_j \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_j)}{\sum_{j=a}^b n_j}$$

が成り立つ．

$$\bar{\chi}_k^2 \equiv \sum_{i=1}^k (n_i - 3)\left(\hat{v}_i^* - \sum_{j=1}^k \lambda_{nj} \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_j)\right)^2$$

とおく．(2.3) と Robertson et al. (1988) の定理 2.3.1 より, 条件 (c.1) の下で,

$$\lim_{n \to \infty} P_0(\bar{\chi}_k^2 \geqq t) = \sum_{L=2}^k P(L, k; \boldsymbol{\lambda}) P\left(\chi_{L-1}^2 \geqq t\right) \quad (t > 0) \tag{6.2}$$

を得る．ただし，χ_{L-1}^2 は自由度 $L-1$ のカイ自乗分布に従う確率変数とする．$P(L, k; \boldsymbol{\lambda})$ の計算法は白石・杉浦 (2018) の第 7 章に解説されている．

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1/k, \tag{6.3}$$

の条件を満たすとき，$P(L, k; \boldsymbol{\lambda})$ は L と k だけに依存するので，$P(L, k; \boldsymbol{\lambda})$ を $P(L, k)$ として簡略化して書く. Shiraishi and Kudo (1981) は漸化式

$$\begin{aligned} P(1, k) &= \frac{1}{k}, \\ P(L, k) &= \frac{1}{k}\{(k-1)P(L, k-1) + P(L-1, k-1)\} \quad (2 \leqq L \leqq k-1), \\ P(k, k) &= \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

を与えている．

$0 < \alpha < 1$ を満たす α を与え，方程式

$$\sum_{L=2}^k P(L, k; \boldsymbol{\lambda}) P\left(\chi_{L-1}^2 \geqq t\right) = \alpha$$

の t の解を $\bar{c}^2(k, \boldsymbol{\lambda}; \alpha)$ で表記する．このとき，$\bar{\chi}_k^2 \geqq \bar{c}^2(k, \boldsymbol{\lambda}; \alpha)$ ならば帰無仮説 H_0 を棄却する．条件 (6.3) の下で $\bar{c}^2(k, \boldsymbol{\lambda}; \alpha)$ の値が Barlow et al. (1972) の数表 A.3 に掲載されている．

(6.1) の順序制約の下で, すべての相関係数相違

$$\{\text{帰無仮説 } H_{(i,i')}: \rho_i = \rho_{i'} \text{ vs. 対立仮説 } H_{(i,i')}^{OA}: \rho_i < \rho_{i'} \,\big|\, (i, i') \in \mathcal{U}_k\}$$

に対する多重比較法を考える．標本サイズが等しい条件

(c.2) $$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n_0$$
を仮定する．このとき，(3.4) より，

$$T_{i'i}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\frac{n_0-3}{2}}\left[\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \{\mathcal{Z}_T(\rho_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\}\right],$$
$$T_{i'i} = \sqrt{\frac{n_0-3}{2}}\{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)\}.$$

である．

$$D_1(t|k) \equiv P\left(\max_{1\leqq i<i'\leqq k}\frac{Z_{i'}-Z_i}{\sqrt{2}} \leqq t\right), \tag{6.4}$$

とおく．ただし，$Z_i \sim N(0,1)$ で $Z_1,\ldots,Z_k$ は互いに独立である. このとき，(2.3) より

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leqq i<i'\leqq k} T_{i'i}(\boldsymbol{\rho}) \leqq t\right) = \lim_{n\to\infty} P_0\left(\max_{1\leqq i<i'\leqq k} T_{i'i} \leqq t\right) = D_1(t|k) \tag{6.5}$$

が成り立つ．方程式 $D_1(t|k) = 1-\alpha$ の解を $d_1(k;\alpha)$ とする, すなわち，$D_1(d_1(k;\alpha)|k) = 1-\alpha$ である. $d_1(k;\alpha)$ の値の求め方は，白石・杉浦 (2018) の第 7 章に解説され，$\alpha = 0.05, 0.01$，$k = 3(1)10$ に対する $d_1(k;\alpha)$ の値が Shiraishi (2022) の数表 6.1 に載せられている．

(6.5) から, ヘイター型の同時信頼区間を得る.

[6.1] ヘイター型の同時信頼区間

$\{\mathcal{Z}_T(\rho_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i) \mid (i,i') \in \mathcal{U}_k\}$ に対する水準 $100(1-\alpha)\%$ の漸近的な同時信頼区間は

$$\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \frac{\sqrt{2}d_1(k;\alpha)}{\sqrt{n_0-3}} < \mathcal{Z}_T(\rho_{i'}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i) < +\infty \quad ((i,i') \in \mathcal{U}_k). \tag{6.6}$$

で与えられる. □

[6.2] シングルステップの漸近的な多重比較検定

{ 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ vs. 対立仮説 $H^{OA}_{(i,i')} \mid (i,i') \in \mathcal{U}_k\}$ に対する水準 α の漸近的な同時検定は, $T_{i'i} > d_1(k;\alpha)$ となる $(i,i') \in \mathcal{U}_k$ に対して 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却することである. □

つぎに閉検定手順について論じる.

$$\mathcal{H}_3 \equiv \{H_{(i,i')} | \, (i,i') \in \mathcal{U}_k\}$$

とおく． $\mathcal{H}_3$ の要素の仮説 $H_{(i,i')}$ の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}}_3 \equiv \left\{\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}} \,\middle|\, \emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{U}_k\right\}$$

で表され, $\overline{\mathcal{H}}_3$ を $\mathcal{H}_3$ の閉包とよんでいる．$\wedge_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}_k} H_{\boldsymbol{v}}$ は一様性の帰無仮説 H_0 となる．さらに $\emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{U}_k$ を満たす V に対して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V} H_{\boldsymbol{v}} \ : \ \text{任意の } (i,i') \in V \text{ に対して}, \rho_i = \rho_{i'}$$

は k 個の母平均に関していくつかが等しいという仮説となる.

$I_1,\cdots,I_J$ ($I_j \neq \emptyset$, $j = 1,\cdots,J$) を, 次の性質 ($\star$) を満たす添え字 $\{1,\cdots,k\}$ の互いに素な部分集合の組とする.

($\star$) ある整数 $\ell_1,\cdots,\ell_J \geqq 2$ とある整数 $0 \leqq s_1 < \cdots < s_J < k$ が存在して，

$$I_j = \{s_j+1, s_j+2, \cdots, s_j+\ell_j\} \ (j = 1,\cdots,J), \tag{6.7}$$

$s_j + \ell_j \leqq s_{j+1}$ $(j = 1, \cdots, J-1)$ かつ $s_J + \ell_J \leqq k$ が成り立つ．

I_j は連続した整数の要素からなり, $\ell_j = \# I_j \geqq 2$ である．同じ I_j $(j = 1, \cdots, J)$ に含まれる添え字をもつ母平均は等しいという帰無仮説を $H^O(I_1, \cdots, I_J)$ で表す．このとき，$\emptyset \subsetneq V \subset \mathcal{U}$ を満たす任意の V に対して，$(\star)$ で述べたある自然数 J とある $I_1, \cdots, I_J$ が存在して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}} = H^O(I_1, \cdots, I_J) \tag{6.8}$$

が成り立つ．さらに仮説 $H^O(I_1, \cdots, I_J)$ は，

$$H^O(I_1, \cdots, I_J):\ \rho_{s_j+1} = \rho_{s_j+2} = \cdots = \rho_{s_j+\ell_j}\ (j = 1, \cdots, J) \tag{6.9}$$

と表現できる．$\emptyset \subsetneq V_0 \subset \mathcal{U}_k$ を満たす V_0 に対して，$\boldsymbol{v} \in V_0$ ならば帰無仮説 $H_{\boldsymbol{v}}$ が真で，$\boldsymbol{v} \in V_0^c \cap \mathcal{U}_k$ ならば $H_{\boldsymbol{v}}$ が偽のとき，1 つ以上の真の帰無仮説 $H_{\boldsymbol{v}}$ $(\boldsymbol{v} \in V_0)$ を棄却する確率が α 以下となる検定方式が水準 α の多重比較検定である．この定義の V_0 に対して，帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V_0} H_{\boldsymbol{v}}$ に対する水準 α の検定の棄却域を A とし, 帰無仮説 $H_{\boldsymbol{v}}$ に対する水準 α の検定の棄却域を $B_{\boldsymbol{v}}$ とすると，帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V_0} H_{\boldsymbol{v}}$ の下での確率測度 $P(\cdot)$ に対して

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_{\boldsymbol{v} \in V_0} B_{\boldsymbol{v}}\right)\right) \leqq P(A) \leqq \alpha \tag{6.10}$$

が成り立つ．

上記の V_0 が未知であることを考慮し，特定の帰無仮説を $H_{\boldsymbol{v}_0} \in \mathcal{H}_3$ としたとき，$\boldsymbol{v}_0 \in V \subset \mathcal{U}_k$ を満たす任意の V に対して, 帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ の検定が水準 α で棄却された場合に, $H_{\boldsymbol{v}_0}$ を棄却する方式を，閉検定手順とよんでいる．

(6.19) より，閉検定手順による多重比較検定のタイプ I FWER が α 以下となる．

$j = 1, \cdots, J$ に対して，

$$T^O(I_j) \equiv \max_{s_j+1 \leqq i < i' \leqq s_j+\ell_j} T_{i'i}$$

を使って閉検定手順が行える．ただし，I_j は (6.16) によって与えられたものとする．(6.11), (6.14), に対応して，$\ell \leqq k$ となる自然数 ℓ に対して，

$$D_1(t|\ell) = P\left(\max_{1 \leqq i < i' \leqq \ell} \frac{Z_{i'} - Z_i}{\sqrt{2}} \leqq t\right) \tag{6.11}$$

とし，

$$\text{方程式 } D_1(t|\ell) = 1 - \alpha \text{ を満たす } t \text{ の解を } d_1(\ell; \alpha) \tag{6.12}$$

とする．ただし，Z_i は (6.4) の中で使われた確率変数と同じとする．

水準 α の帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ に対する検定方法を具体的に論述することができる．

[6.3] 最大値統計量に基づくマルチステップ検定

(6.8) の $H^O(I_1, \cdots, I_J)$ に対して，M を

$$M \equiv M(I_1, \cdots, I_J) \equiv \sum_{j=1}^{J} \ell_j \tag{6.13}$$

とする．

(a) $J \geqq 2$ のとき

$\ell = \ell_1, \ldots, \ell_J$ に対して

$$\alpha(M, \ell) \equiv 1 - (1 - \alpha)^{\ell/M} \tag{6.14}$$

で $\alpha(M, \ell)$ を定義する．$1 \leqq j \leqq J$ となるある整数 j が存在して $d_1\left(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)\right) < T^O(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ を棄却する．

(b) $J = 1$ $(M = \ell_1)$ のとき

$d_1(\ell_1; \alpha) < T^O(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ を棄却する．

(a), (b) の方法で, $(i, i') \in V \subset \mathcal{U}_k$ を満たす任意の V に対して, $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ が棄却されるとき，多重比較検定として，$H_{(i,i')}$ を棄却する． □

ここで定理 6.1 を得る．

定理 6.1 [6.3] の検定は水準は α の漸近的な多重比較検定である．

証明 白石・杉浦 (2018) の定理 5.7 と同様に示せる． □

(c.2) の条件を仮定しない手法を解説する, すなわち，標本サイズの等しくなくてもよい．$j = 1, \ldots, J$ に対して，$u_{s_j+1} \leqq u_{s_j+2} \leqq \ldots \leqq u_{s_j+\ell_j}$ の条件の下で $\sum_{i \in I_j} \lambda_{ni} (u_i - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i))^2$ を最小にする $(u_{s_j+1}, \ldots, u_{s_j+\ell_j})$ を $(\hat{v}^*_{s_j+1}(I_j), \ldots, \hat{v}^*_{s_j+\ell_j}(I_j))$ とする．すなわち，

$$\sum_{i \in I_j} \lambda_{ni} \left(\hat{v}^*_i(I_j) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)\right)^2 = \min_{u_{s_j+1} \leqq \ldots \leqq u_{s_j+\ell_j}} \sum_{i \in I_j} \lambda_{ni} (u_i - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i))^2,$$

である．ただし，I_j, s_j, ℓ_j は $(\star)$ で定義されているものと同じとする．

[6.4] $\bar{\chi}^2$ 統計量に基づくマルチステップ法

$$\bar{\chi}^2_{\ell_j}(I_j) \equiv \sum_{i \in I_j} (n_i - 3) \left(\hat{v}^*_i(I_j) - \sum_{i \in I_j} \left(\frac{n_i}{n(I_j)} \right) \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) \right)^2 \quad (j = 1, \ldots, J)$$

とおく．ただし，$n(I_j) = \sum_{i \in I_j} n_i$ とする．

(6.2) と同様の議論により，

$$\lim_{n \to \infty} P_0(\bar{\chi}^2_{\ell_j}(I_j) \geqq t) = \sum_{L=2}^{\ell_j} P(L, \ell_j; \boldsymbol{\lambda}(I_j)) P\left(\chi^2_{L-1} \geqq t\right), \quad (t > 0)$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{\lambda}(I_j) \equiv (\lambda_{s_j+1}, \lambda_{s_j+2}, \ldots, \lambda_{s_j+\ell_j})$ とする．

$0 < \beta < 1$ となる β を与え，方程式

$$\sum_{L=2}^{\ell_j} P(L, \ell_j; \boldsymbol{\lambda}(I_j)) P\left(\chi^2_{L-1} \geqq t\right) = \beta$$

の t の解を $\bar{c}^2\left(\ell_j, \boldsymbol{\lambda}(I_j); \beta\right)$ で表記する．

(a) $J \geqq 2$ のとき

$\alpha(M, \ell)$ を (6.14) で定義する．$1 \leqq j \leqq J$ となるある整数 j が存在して $\bar{c}^2\left(\ell_j, \boldsymbol{\lambda}(I_j); \alpha(M, \ell_j)\right) < \bar{\chi}^2_{\ell_j}(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ を棄却する．

(b) $J = 1$ $(M = \ell_1)$ のとき

$\bar{c}^2(\ell_1, \boldsymbol{\lambda}(I_1); \alpha) < \bar{\chi}^2_{\ell_1}(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ を棄却する．

(a), (b) の方法で, $(i, i') \in V \subset \mathcal{U}_k$ を満たす任意の V に対して, $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ が棄却されるとき，多重比較検定として，$H_{(i,i')}$ を棄却する． □

定理 6.1 と同様に定理 6.2 を得る．

定理 6.2 [6.4] の検定は水準は α の漸近的な多重比較検定である．

証明 白石・杉浦 (2018) の定理 5.7 と同様に示せる． □

6.2 対照群との多重比較検定法

第 5 節に対応して第 1 群を対照群, その他の群は処理群と考え, どの処理と対照の間に差があるかを調べることである．まずは

$$n_2 = \cdots = n_k \tag{6.15}$$

の制限を置く．n_1 は他のサイズ n_2 と等しい必要はない．

傾向性の制約 (6.1) は成り立っているものとする．帰無仮説 H_i： $\rho_i = \rho_1$ vs. 対立仮説 H_i^A： $\rho_i > \rho_1$ を考える. T_ℓ を

$$T_\ell \equiv \frac{\hat{\mu}_\ell - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_1)}{\sqrt{\frac{1}{n_2-3} + \frac{1}{n_1-3}}}$$

によって定義する．ただし，

$$\hat{\mu}_\ell \equiv \max_{2 \leqq s \leqq \ell} \frac{\sum_{i=s}^{\ell} \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)}{\ell - s + 1}$$

とする．

$W_1, Z_2, \ldots, Z_k$ は互いに独立で $W_1 \sim N(0, \lambda_2/\lambda_1), Z_i \sim N(0, 1)$ とし，

$$D_2(t|\ell, \lambda_2/\lambda_1) \equiv P\left(\frac{\hat{\mu}_\ell^{\diamond} - W_1}{\sqrt{1 + \lambda_2/\lambda_1}} \leqq t \right), \tag{6.16}$$

とおく．ただし，$\hat{\mu}_\ell^{\diamond} \equiv \max_{2 \leqq s \leqq \ell} \left\{ \left(\sum_{i=s}^{\ell} Z_i \right) / (\ell - s + 1) \right\}$ とする. 一様性の帰無仮説 H_0 の下で

$$\lim_{n \to \infty} P_0 \left(T_\ell \leqq t \right) = D_2(t|\ell, \lambda_2/\lambda_1).$$

が成り立つ．$D_2(t|\ell, \lambda_2/\lambda_1) = 1-\alpha$ の t の解を $d_2(\ell, \lambda_2/\lambda_1; \alpha)$ とする, すなわち., $D_2(d_2(\ell, \lambda_2/\lambda_1; \alpha)) = 1-\alpha$ である. 条件 (c.2) の下で，$\alpha = 0.05,\ 0.025,\ 0.01$ に対して, $d_2(\ell, 1; \alpha)$ の値が Williams (1971) の数表 1 と 数表 2 に載せられている．白石・杉浦 (2018) は $d_2(\ell, 1; \alpha)$ をもとめるアルゴリズムを述べている. そのアルゴリズムは Williams (1971) のアルゴリズムより有効である.

[6.5] ウィリアムズ型の漸近的な多重比較検定

ある i が存在して，$i \leqq \ell \leqq k$ となるすべての ℓ に対して $d_2(\ell, \lambda_2/\lambda_1; \alpha) < T_\ell$ を満たすならば帰無仮説 H_i を棄却する. □

つぎに，(6.15) を仮定しない手法を紹介する．$\ell = 2, \ldots, k$ に対して，$\mathcal{I}_\ell \equiv \{i \mid 1 \leqq i \leqq \ell\}$ とおく. $\ell = 2, \ldots, k$ に対して $(\hat{v}_1^*(\mathcal{I}_\ell), \ldots, \hat{v}_\ell^*(\mathcal{I}_\ell))$ を $u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_\ell$ の下で $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_{ni} (u_i - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i))^2$ を最小にする $(u_1, \ldots, u_\ell)$ の解とする．すなわち，

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_{ni} \left(\hat{v}_i^*(\mathcal{I}_\ell) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)\right)^2 = \min_{u_1 \leqq \ldots \leqq u_\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_{ni} \left(u_i - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)\right)^2,$$

である．ただし，$\lambda_{ni} \equiv n_i/n, n \equiv n_1 + \ldots + n_k$ とする.　このとき

$$\bar{\chi}_\ell^2(\mathcal{I}_\ell) \equiv \sum_{i=1}^{\ell} (n_i - 3) \left(\hat{v}_i^*(\mathcal{I}_\ell) - \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{n_i}{n(\mathcal{I}_\ell)} \right) \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) \right)^2 \quad (\ell = 2, \ldots, k), \tag{6.17}$$

とおく．ただし，$n(\mathcal{I}_\ell) \equiv \sum_{i=1}^{\ell} n_i$ とする.

ここで，白石・杉浦 (2018) の 5.6.2 節で述べられた議論とと同様にして，条件 (c.1) の下で

$$\lim_{n \to \infty} P_0(\bar{\chi}_\ell^2(\mathcal{I}_\ell) \geqq t) = \sum_{L=2}^{\ell} P(L, \ell; \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{I}_\ell)) P\left(\chi_{L-1}^2 \geqq t\right) \quad (t > 0). \tag{6.18}$$

を得る．$0 < \alpha < 1$ となる α に対して

$$\sum_{L=2}^{\ell} P(L, \ell; \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{I}_\ell)) P\left(\chi^2_{L-1} \geqq t\right) = \alpha$$

を満たす t の解を $\bar{c}^2(\ell, \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{I}_\ell); \alpha)$ とする．このとき，つぎの多重比較検定を得る．

[6.6] $\bar{\chi}^2$ 統計量に基づく多重比較検定

ある i が存在して，$i \leqq \ell \leqq k$ となるすべての ℓ に対して $\bar{c}^2(\ell, \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{I}_\ell); \alpha) < \bar{\chi}^2_\ell(\mathcal{I}_\ell)$ を満たすならば帰無仮説 H_i を棄却する． □

[6.6] が水準 α の漸近的な多重比較検定であることは白石・杉浦 (2018) の定理 5.15 と同様に示すことができる．

6.3 隣接した母数の相違

1 つの比較のための検定は

$$\text{帰無仮説 } H_{(i,i+1)}：\ \rho_i = \rho_{i+1} \text{ vs. 対立仮説 } H^{OA}_{(i,i+1)}：\ \rho_i < \rho_{i+1}$$

となる．

$$\mathcal{I}_{1,k-1} \equiv \{i \mid 1 \leqq i \leqq k-1\}. \tag{6.19}$$

とおく．$\boldsymbol{\rho} \equiv (\rho_1, \cdots, \rho_k)$ と $i \in \mathcal{I}_{1,k-1}$ に対して

$$\widehat{T}_i(\boldsymbol{\rho}) \equiv T_{i+1,i}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i+1}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - \{\mathcal{Z}_T(\rho_{i+1}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i)\}}{\sqrt{\frac{1}{n_i-3} + \frac{1}{n_{i+1}-3}}}$$

$$\widehat{T}_i \equiv T_{i+1,i}(\mathbf{0}) = \frac{\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i+1}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i)}{\sqrt{\frac{1}{n_i-3} + \frac{1}{n_{i+1}-3}}}$$

とおく．さらに，

$$D_3(t) \equiv P\left(\max_{1 \leqq i \leqq k-1} \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_i}}} \leqq t\right) \tag{6.20}$$

とおく．ただし，$Y_i \sim N(0, 1/\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ かつ $Y_1, \ldots, Y_k$ は互いに独立とする．このとき，(2.1) から，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1 \leqq i \leqq k-1} \widehat{T}_i(\boldsymbol{\rho}) \leqq t\right) = \lim_{n\to\infty} P_0\left(\max_{1 \leqq i \leqq k-1} \widehat{T}_i \leqq t\right) = D_3(t).$$

を得る．$D_3(t) = 1-\alpha$ を満たす t の解を $d_3(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \alpha)$ とする．すなわち，$D_3(d_3(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \alpha)) = 1-\alpha$ である. $d_3(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \alpha)$ の求め方は, 白石・杉浦 (2018) を参照すること．

ここで，リー・スプーリエル (Lee-Spurrier) 型のシングルステップ法 [6.7] と [6.8] を得る．

[6.7] 漸近的な同時信頼区間

$\{\mathcal{Z}_T(\rho_{i+1}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i) \mid i \in \mathcal{I}_{1,k-1}\}$ に対する信頼係数 $100(1-\alpha)\%$ の漸近的な同時信頼区間は

$$\mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_{i+1}) - \mathcal{Z}_T(\hat{\rho}_i) - d_3(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \alpha)\sqrt{\frac{1}{n_{i+1}} + \frac{1}{n_i}}$$
$$< \mathcal{Z}_T(\rho_{i+1}) - \mathcal{Z}_T(\rho_i) < \infty \quad (i \in \mathcal{I}_{1,k-1})$$

で与えられる． □

[6.8] 漸近的なシングルステップ多重比較検定

$\{$ 帰無仮説 $H_{(i,i+1)}$ vs. 対立仮説 $H^{OA}_{(i,i+1)} \mid i \in \mathcal{I}_{1,k-1}\}$ に対する水準 α の漸近的な同時検定は，$\widehat{T}_i > d_3(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \alpha)$ となる $i \in \mathcal{I}_{1,k-1}$ に対して 帰無仮説 $H_{(i,i+1)}$ を棄却することである． □

$n_1 = \ldots = n_k$ とする．すなわち， $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1/k$ のときの $d_3(k, 1/k, \ldots, 1/k; \alpha)$ の値は Lee and Spurrier (1995) に掲載されている．

つぎに閉検定手順について述べる．$\mathcal{V}_k \equiv \{(i, i+1) \mid i \in \mathcal{I}_{1,k-1}\}$ とおき，

$$\mathcal{H}_4 \equiv \{H_{(i,i+1)} | \, i \in \mathcal{I}_{1,k-1}\}$$

とおく． $\mathcal{H}_4$ の要素の仮説 $H_{(i,i+1)}$ の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}}_4 \equiv \left\{ \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}} \,\middle|\, \emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{V}_k \right\}$$

で表され，$\overline{\mathcal{H}}_4$ を $\mathcal{H}_4$ の閉包とよんでいる．$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_k} H_{\boldsymbol{v}}$ は一様性の帰無仮説 H_0 となる．さらに $\emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{V}_k$ を満たす V に対して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}} \ : \ \text{任意の } (i, i+1) \in V \text{ に対して}, \rho_i = \rho_{i+1}$$

は k 個の母平均に関して隣り合ういくつかが等しいという仮説となる．

$I_1, \cdots, I_J$ ($I_j \neq \emptyset$, $j = 1, \cdots, J$) を，次の性質 ($\sharp$) を満たす添え字 $\{1, \cdots, k\}$ の互いに素な部分集合の組とする．

($\sharp$) ある整数 $\ell_1, \cdots, \ell_J \geqq 2$ とある整数 $0 \leqq s_1 < \cdots < s_J < k$ が存在して，

$$I_j = \{s_j + 1, s_j + 2, \cdots, s_j + \ell_j\} \ (j = 1, \cdots, J), \tag{6.21}$$

$s_j + \ell_j \leqq s_{j+1}$ $(j = 1, \cdots, J-1)$ かつ $s_J + \ell_J \leqq k$ が成り立つ．

I_j は連続した整数の要素からなり，$\ell_j = \# I_j \geqq 2$ である．同じ I_j $(j = 1, \cdots, J)$ に含まれる添え字をもつ母平均は等しいという帰無仮説を $H^O(I_1, \cdots, I_J)$ で表す．このとき，$\emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{V}_k$ を満たす任意の V に対して，($\sharp$) で述べたある自然数 J とある $I_1, \cdots, I_J$ が存在して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}} = H^O(I_1, \cdots, I_J) \tag{6.22}$$

が成り立つ．さらに仮説 $H^O(I_1, \cdots, I_J)$ は，

$$H^O(I_1, \cdots, I_J) : \ \rho_{s_j+1} = \rho_{s_j+2} = \cdots = \rho_{s_j+\ell_j} \ (j = 1, \cdots, J) \tag{6.23}$$

と表現できる．

(6.22) の $H^O(I_1, \ldots, I_J)$ に対して，

$$M = M(I_1, \ldots, I_J) = \sum_{j=1}^{J} \ell_j, \ \ell_j = \#(I_j). \tag{6.24}$$

とおく． $j = 1, \ldots, J$ に対して，

$$D_3(t|I_j) \equiv P\left(\max_{s_j+1 \leqq i \leqq s_j+\ell_j-1} \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_i}}} \leqq t \right), \tag{6.25}$$

とおく．ただし，Y_i は (6.20) で定義されているものとする．$D_3(t|I_j) = 1-\alpha$ を満たす t の解を $d_3(\ell_j, I_j; \alpha)$ とする．すなわち，$D_3(d_3(\ell_j, I_j; \alpha)|I_j) = 1 - \alpha$ が成り立つ．ここで閉検定手順 [6.9] を得る．

[6.9] ステップワイズ法

条件 (c.1) が満たされるとする．

$$\widehat{T}(I_j) \equiv \max_{s_j+1 \leqq i \leqq s_j+\ell_j-1} \widehat{T}_i \quad (j = 1, \ldots, J).$$

とおく．

(a) $J \geqq 2$ のとき

(6.14) の $\alpha(M, \ell)$ に対して, $1 \leqq j \leqq J$ となるある整数 j が存在して $d_3\left(\ell_j, I_j; \alpha(M, \ell_j)\right) < \widehat{T}(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_{v}$ を棄却する．

(b) $J = 1$ $(M = \ell_1)$ のとき

$d_3(\ell_1, I_1; \alpha) < \widehat{T}(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_{v}$ を棄却する．

(a), (b) の方法で, $(i, i+1) \in V \subset \mathcal{V}_k$ を満たす任意の V に対して, $\bigwedge_{v \in V} H_{v}$ が棄却されるとき，多重比較検定として，$H_{(i,i+1)}$ を棄却する． □

$n_1 = \cdots = n_k$ のときの $d_3\left(\ell_j, I_j; \alpha(M, \ell_j)\right)$ の数表が Shiraishi (2022) の表 7.3 に載せられている．

ここで定理 6.1 を得る．

定理 6.1 [6.9] の検定は水準は α の漸近的な多重比較検定である．

証明 Shiraishi (2022) の定理 7.2 と同様である． □

7 おしまいに

正規分布の下での多群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較法は，シングルステップ法として，Tukey (1953), Kramer (1956) によって与えられ，Tukey-Kramer 法と呼ばれている．マルチステップ法として REGW(Ryan-Einot-Gabriel-Welsch) の方法があり，SAS システムや SPSS システムに組み込まれている．白石 (2011a) は Tukey-Kramer 法と REGW 法よりも一様に検出力を高くする手法を提案した．多群連続モデルで分布に依存しない順位にもとずく多重比較法として，Steel (1960) と Dwass (1960) がシングルステップの多重比較検定を提案し，Critchlow and Fligner (1991) は，同時信頼区間を構築した．白石 (2011a) は Steel (1960) と Dwass (1960) の方法を一様に優越する順位による多重比較検定を提案している．対照群との平均相違に対する多重比較法は Dunnett (1955) により議論されている．位置母数に順序制約のある多群モデルにおける多重比較法は，Hayter (1990), Lee and Spurrier (1995) が提案されているが，これらを優越する多重比較法が白石 (2014) によって述べられている．以上の内容は，白石 (2011b), 白石・杉浦 (2018)，Shiraishi et al. (2019) にレビューされている．

多群ベルヌーイモデルですべての比率の多重比較法は Shiraishi (2022) によってレビューされている．また，ポアソンモデルと指数モデルはそれぞれ Shiraishi (2012) と白石 (2013) に与えられている．以上はいずれも平均母数の多重比較法である．ここでの内容は相関係数のペアごとの相違に対する多重比較法を述べた唯一の論文である．

謝辞

本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C)(課題番号 18K11204) 及び 2022 年度南山大学パッヘ研究奨励金 I-A-2 の援助を受けたものである．

参考文献

[1] Anderson, T. W. (2003). *An introduction to multivariate statistical analysis. Third Edition*. Wiley, New York.

[2] Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972). *Statistical Inference under Order Restrictions*. Wiley, London.

[3] Critchlow, D. E. and Fligner, M. A. (1991). Nonparametric multiple comparisons in the one-way analysis of variance. *Commun. Statist. Ser A*. **20**. pp.127–139.

[4] Dunnett, C. W. (1955). A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **50**, pp.1096–1121.

[5] Dwass, M. (1960). *Some k-sample rank order tests, Contributions to Probability and Statistics.* Stanford University Press, pp.198–202.

[6] Hayter, A. J. (1984). A proof of the conjecture that the Tukey-Kramer multiple comparisons procedure is conservative. *Annals of Statistics* **12**. pp.61?-75.

[7] Hayter, A. J. (1990). A one-sided Studentized range test for testing against a simple ordered alternative. *J. Amer. Statist. Assoc.* **85**. pp.778-785.

[8] Kramer, C. Y. (1956). Extension of multiple range tests to goup means with unequal numbers of replications. *Biometrics* **8**. pp.75?-86.

[9] Lee, R. E. and Spurrier, J. D. (1995). Distribution-free multiple comparisons between successive treatments. *J. Nonparametric Statist.*, **5**, pp.261–273.

[10] Ramsey, P. H. (1978). Power differences between pairwise multiple comparisons. *J. Amer. Statist. Assoc.* **73**, pp.479–485.

[11] Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L. (1988). *Order Restricted Statistical Inference.* Wiley, New York.

[12] Shiraishi, T. (2012). Multiple comparison procedures for Poisson parameters in multi-sample models. *Behaviormetrika* **39**, pp.167–182.

[13] Shiraishi, T. (2022). *Multiple Comparisons for Bernoulli Data*. Springer.

[14] Shiraishi, T. and Kudo, A. (1981). A nonparametric test of trend based on amalgamation. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* (A) **35**. pp.235–245.

[15] Shiraishi, T.， Sugiura, H. and Matsuda, S. (2019). *Pairwise Multiple Comparisons-Theory and Computation*. SpringerBriefs. Springer International Publishing.

[16] Steel, R. G. D. (1960). A rank sum test for comparing all pairs of treatments. *Technometrics,* **2**, pp.197-207.

[17] Tukey, J. W. (1953). The Problem of Multiple Comparisons. *The Collected Works of John W. Tukey, J. W. (1994), Volume VIII. Multiple Comparisons*. Chapman and Hall.

[18] Williams, D. A. (1971). A test for differences between treatment means when several dose levels are compared with a zero dose con-trol. *Biometrics* **27**, pp.103–117.

[19] 白石高章 (2011a). 多群モデルにおけるすべての平均相違に関する閉検定手順. 計量生物学, 32 巻 pp.33–47.

[20] 白石高章 (2011b). 『多群連続モデルにおける多重比較法—パラメトリック, ノンパラメトリックの数理統計』 共立出版.

[21] 白石高章 (2012). 『統計科学の基礎—データと確率の結びつきがよくわかる数理』 日本評論社.

[22] 白石高章 (2013). 多群指数モデルにおける平均パラメータの多重比較法. 計量生物学，34 巻 pp.1–20.

[23] 白石高章 (2014). 多群連続モデルにおける位置母数に順序制約のある場合の閉検定手順. 日本統計学会和文誌, 43 巻 pp.215–245.

[24] 白石高章, 松田眞一 (2016). 順序制約のある場合のすべての平均相違に対する Bartholomew の検定に基づく閉検定手順. 日本統計学会和文誌, 45 巻 pp.247–271.

[25] 白石高章，杉浦洋 (2018). 『多重比較法の理論と数値計算』 共立出版.

[26] 丹後俊郎，小西貞則 編集 (2010). 『医学統計学の事典』 朝倉書店.

[27] 横山 颯，安田 竜規，白石 高章 (2023). 多群 2 次元正規分布モデルにおけるすべての相関係数の多重比較法とその応用. 南山大学アカデミア 理工学編. 23 巻.