＜南山経済研究　第37巻第3号　2023年3月＞

明示的内部構造を有する集団による コンテストについて[1)]

上　田　　　薫

1．イントロダクション

本稿の目的は，集団コンテストにおける競合集団の内部に明示的な協業の内部構造を導入し，その変化が報酬体系に及ぼす影響を解明することである。経済的ないし政治的利益（プライズ）が集団の間で争われる場合を扱う集団コンテストのモデル分析は，Katz et al.（1990）およびNitzan（1991）の研究を嚆矢とするが，彼らの業績を含め近年までの研究の多くは，利益獲得のための集団の活動水準が集団構成員の努力の単純和で与えられるとしてきた。政治宣伝のチラシを戸別にメールボックスへ投函していく活動のような，各構成員の努力が互いに完全代替物である場合のみを考えてきたわけである。構成員の貢献が資金提供の形で行われ，徴収された資金による財ないしサービスの購入量で集団としての活動水準が決まる場合であれば，このような定式化も不自然なものではないだろう。しかし，広く見られる形態とは言え，これは集団による利益獲得活動の特殊なタイプに過ぎない。

公共財の自発的供給に関する研究において，Hirshleifer（1983）により個人間の努力の補完性の重要性が指摘され，公共財生産量を個人の努力のCES関数で表現する定式化（Cornes（1983），Cornes and Hartley（2007））が行われるようになると，同様の定式化が集団コンテストの分野でも試みられるようになった。すなわち，集団による利益獲得のための活動水準が，構成員の努力のCES関数で表現されるモデルである（Kolmar and Rommeswinkel（2013），Crutzen et al.（2020），Kobayashi and Konishi（2021））。この一般化によって，集団内の構成員同士の補完性を明示的な形で扱うことが可能となった[2)]。

1）本論文は科研費助成事業（Grant Number JP21K01550）および2022年度パッヘ研究奨励金Ⅰ－A－2の援助を受けた研究の成果である。

2）厳密に言えば，集団の活動水準が集団構成員の努力の単純和で与えられる場合であっても，各構成員の努力に関する費用関数が限界費用逓増の形をしている場合は，集団内の個人の努力の間に補完性が生じていると見ることもできる。特定の個人のみが大きな貢献をするより全員がバランスよく貢献を行う方が，努力の総費用を低くできるからである。限界費用逓増が集団コンテス

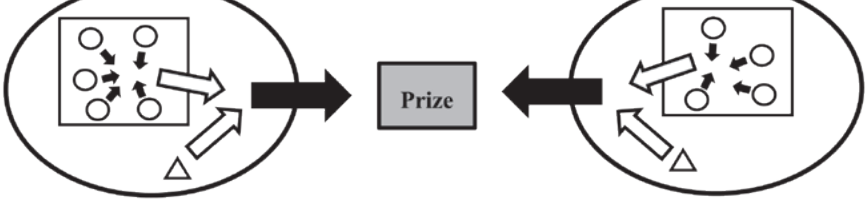

図1

本稿では，こうした一般化をさらに進めることで，集団内の分業と協業の内部構造を明示化したモデルの構築を試みる。具体的には，Sato（1967）が提案した2段階CES関数によって集団の活動水準が表されるという定式化により，図1に示したような構造を有する集団間のコンテストの分析を行う。この図は二つの集団によるコンテストの場合を描いているが，モデルでは任意の数の集団によるコンテストを考えていく。

図に示されるとおり，我々の集団コンテストモデルにおける各集団は，その内部に下位集団を包含している。この下位集団の構成員の貢献の間には補完性があり，チームとして協業することによって，全体集団の活動のためのインプットを生み出す。そして，下位集団に属さない個人の貢献によるインプットと結びつくことで，集団全体の活動が生じる。通常は，この二種類のインプットの間にも補完性があるだろう。例えばレーシングチームのメカニックグループとレーサー，選挙における候補者と運動員集団，タクシードライバーと配車係（プライズは営業地域の市場シェア）などによる活動が，対応していると思われる[3)]。

集団内の個人は，事前に定められた各々への成功報酬に応じて，自発的に貢献努力の水準を決めるものとする。このとき各集団のコンテストにおける勝利の可能性は，集団内の報酬の分布により変化する。勝利の可能性を最大にする報酬体系は，集団の内部構造の変化からどのような影響を被るだろうか。こうした問題は，従来の集団コンテストのモデルでは扱うことが困難であった。これを可能にすることは，我々のモデルの有する大きな利点である。

以下では，下位集団の個人間の貢献の補完性の変化が，下位集団の個人及びその外に居る（同一集団の）個人の相対的報酬に及ぼす効果を検討する。下位集団の業務が要求するチームワークの程度の影響を見るわけである。単純にどちらかの報酬が増え

トに対して持つ含意については，Esteban and Ray (2001) が有益である。

3）図1よりもさらに複雑な，各集団が複数の下位集団を包含するモデルを考え，複数事業部を抱える組織の分析を行うことも可能である。その場合のモデルの均衡の存在と一意性は，第2節での議論の単純な拡張により示すことができる。

るという話にはならず，下位集団の能力（生産性）と外部の個人のそれの大きさにより異なる結果となることが明らかにされる。本稿が扱う内部構造と報酬体系に関わるもう一つの問題は，集団内個人の異質性の程度が報酬体系に及ぼす影響である。競合する集団内の個人間に異質性が存在するような集団コンテストに関しては既に多くの先行文献が存在しており（Baik（2008），Epstein and Mealem（2009），Esteban and Ray（2011），Ryvkin（2011），Nitzan and Ueda（2014）），これらを踏まえた我々のモデルにおいても集団内の個人の能力は均等ではない。そこで新たに生じる興味深い問題の一つは，下位集団内の個人の能力の不均等の程度が報酬体系に及ぼす影響である。下位集団の個人の能力が不揃いであるとき，これに属さない個人の報酬は増加するのか，それとも減少するのか。この点についても明らかにしたい。

以下では，第2節においてモデルの詳細を記述し，その均衡の存在と一意性を示す。第3節では，コンテストにおける勝利の確率を最大にするという意味での最適報酬体系を特徴づける。第4節では集団の内部構造と最適報酬の関係について，上述した問題に関する検討を行う。第5節では今後の展望について述べる。

2. モデル

あるプライズをめぐって競合する m 個の集団を考える。各集団がプライズを勝ち取る確率は，当該集団が生み出す獲得活動の水準の相対的大きさにより決まるものとする。集団 j の活動水準を $X_j \geq 0$ と表すことにすれば，集団 i $(i = 1, \dots, m)$ が勝利する確率は，$X = \sum_{j=1}^{m} X_j$ という表記を用いて $\frac{X_i}{X}$ で与えられることになる。つまり標準的なTullockタイプの勝利確率を仮定するわけである。我々のモデルの特徴は，当該集団の構成員の努力がどのように集団の活動水準を決めるかという点に現れる。

図1で示したように，競合する集団の各々は一つの下位集団を包含している。代表として集団 i を取り上げ，その下位集団に属する個人の集合を $\{1, \dots, n_i\}$ で表す。k 番目の個人の努力水準を $e_k \geq 0$ と表すとき[4]，この下位集団が生み出す「インプット」はCES関数により(1)式のように与えられるとする。ここでは，$a_k > 0$（$k = 1, \dots, n_i$）を個人 k の能力を表す係数だと解釈する[5]。その値が高い個人ほど，同じ努力水準によって一層大きな貢献が可能だというわけである。一般性を失うことなく，$a_1 \leq \cdots \leq a_{n_i}$ であるとする。

4）i 番目の集団の k 番目の個人について言及しているのだから，集団名も特定して $e_{ik} \geq 0$ とする方が適切だろう。しかし，以下の議論において異なる集団の個人間の比較等を行う場面はないことから，個人に関する他の記号も含め，集団名を表す添字は省略する。

5）下位集団内の構成員間で業務内容が異なっている場合を考え，それらの重要性の相違を表す係数として解釈することも可能である。

$$Z=\left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k e_k^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (\sigma<1, \quad \sigma\neq 0) \tag{1}$$

パラメータ σ は，下位集団内の個人の努力の間の補完性を表す。代替の弾力性が $\frac{1}{1-\sigma}$ であるから，σ の値が小さいほど補完性が強いことになる。

下位集団の外部にいて個人として全体集団への貢献を行う構成員（図1の△で表される）を個人0と呼ぶことにし，その努力を $e_0\geq 0$ で表す。簡単化のため，この個人の能力を表す係数は1に標準化する。この個人の貢献は集団全体の活動に対する直接の「インプット」となり，集団 i の活動水準 X_i は

$$X_i=\left(\rho_0 e_0^{\gamma}+\rho Z^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left[\rho_0 e_0^{\gamma}+\rho\cdot\left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k e_k^{\sigma}\right)^{\frac{\gamma}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (\gamma<1, \quad \gamma\neq 0) \tag{2}$$

で与えられるものと仮定する。パラメータ ρ_0, ρ は，集団全体の活動を行う上での各々の「インプット」の重要性を示すものと解釈される。パラメータ γ は，下位集団の貢献と個人0の貢献の間の補完性を表す。二種類の「インプット」の間の補完性は，γ の値が小さいほど強いものになる。

このモデルで考えるコンテストのプライズは分割可能な私的財であるものとし，成功報酬として集団構成員に分配されるものとする。プライズの価値を V とし，第 i 集団の個人 k が得る報酬を $v_k>0$（$k=1,\ldots,n_i$）とする。ただし $\sum_{k=1}^{n_i} v_k=V$ である。努力に伴う費用関数は全ての個人について同一の形状を持つとし，$\frac{c}{\beta}e_k^{\beta}$（$\beta>1$，$c>0$）で与えられるとする[6)]。各個人は危険中立的であると仮定すれば，第 i 集団の個人 h の期待効用は

$$u_h=\frac{X_i}{X}\cdot v_h-\frac{c}{\beta}\cdot e_h^{\beta} \tag{3}$$

で与えられることになる。これでコンテストの戦略形が得られたことになる。

各個人はコンテストにおいて，各々の期待効用を最大化するために，相互に独立に所属集団への貢献努力の水準を決めるものとする。したがって，このゲームは同一集団に属する個人間においても非協力ゲームであり，採用される均衡概念は通常のナッシュ均衡である。(2)式が $\mathbf{e}=\left(e_0, e_1\cdots, e_{n_i}\right)$ の凹関数であることから[7)]，(3)式の期待効

6）集団構成員の間で β の値が異なるという定式化の下でも，均衡の存在と一意性の結果は変わらないし，最適報酬体系の導出も可能である。しかし我々の関心は集団の内部構造と報酬体系の間の関係にあることから，不要な議論の複雑化は避けることにする。

7）(1)が凹関数であり，$\left(\rho_0 e_0^{\gamma}+\rho Z^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ が増加凹関数であることから導かれる。

用は当該個人の努力の凹関数である。よって非負制約を考慮に入れた最大化の必要十分条件は，下位集団に属する個人について

$$\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{v_k}{X}\cdot X_i^{1-\gamma}\cdot\rho\cdot Z^{\gamma-\sigma}\cdot a_k\cdot e^{\sigma-1}-c\cdot e_k^{\beta-1}\leq 0$$

（ただし $e_k>0$ の場合は等号で成立。$k=1,\dots,n_i$），下位集団外の個人0について

$$\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{v_0}{X}\cdot X_i^{1-\gamma}\cdot\rho_0\cdot e_0^{\gamma-1}-c\cdot e_0^{\beta-1}\leq 0$$

（ただし $e_0>0$ の場合は等号で成立）となる。均衡では，以上の条件が各々の個人について成立しなければならない。

この必要条件を精査することで，均衡では $X>0$ が成立しなければならないことがわかる。そこからさらに，全ての集団 i $(i=1,\dots,m)$ において $X_i>0$ が成立しなければならないことを導け，さらに各集団内において $e_k>0$ $(k=0,1,\dots,n_i)$ が成り立たねばならないことが示される。よって均衡の必要十分条件は，

$$\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{v_k}{X}\cdot X_i^{1-\gamma}\cdot\rho\cdot Z^{\gamma-\sigma}\cdot a_k\cdot e_k^{\sigma-1}-c\cdot e_k^{\beta-1}=0\qquad k=1,\dots,n_i \tag{4}$$

$$\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{v_0}{X}\cdot X_i^{1-\gamma}\cdot\rho_0\cdot e_0^{\gamma-1}-c\cdot e_0^{\beta-1}=0 \tag{5}$$

が全ての集団 i $(i=1,\dots,m)$ において成り立つことである。

我々は，この必要十分条件を用いて均衡の存在と一意性を示すことができる。まず⑷式を e_k について解くことにより，

$$e_k=\left\{\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{\rho a_k}{c}\cdot v_k\right\}^{\frac{1}{\beta-\sigma}}\cdot X_i^{\frac{1-\gamma}{\beta-\sigma}}\cdot Z^{\frac{\gamma-\sigma}{\beta-\sigma}}\qquad k=1,\dots,n_i \tag{6}$$

を得る。これより

$$a_k e_k^{\sigma}=\left\{\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{\rho v_k}{c}\right\}^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}a_k^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}}\cdot X_i^{\frac{\sigma\cdot(1-\gamma)}{\beta-\sigma}}\cdot Z^{\frac{\sigma\cdot(\gamma-\sigma)}{\beta-\sigma}}\qquad k=1,\dots,n_i$$

となるので，これを全ての k について辺々足し合わせると，左辺は Z^{σ} と一致する。そこで，得られた式を Z について以下のように解くことができる。

$$Z=\left\{\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{\rho}{c}\right\}^{\frac{1}{\beta-\gamma}}\cdot X_i^{\frac{1-\gamma}{\beta-\sigma}}\left[\sum_{k=1}^{n_i}\left(v_k a_k^{\frac{\beta}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}\right]^{\frac{\beta-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{1}{\beta-\gamma}} \tag{7}$$

これを用いて，

$$\rho Z^{\gamma}=\left\{\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{1}{c}\right\}^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\cdot\rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\cdot X_i^{\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{\beta-\gamma}}\left[\sum_{k=1}^{n_i}\left(v_k a_k^{\frac{\beta}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}\right]^{\frac{\beta-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}$$

という式が得られる。一方⑸式を用いることにより，

$$\rho_0 e_0^\gamma = \left\{\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{1}{c}\right\}^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\cdot\rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\cdot v_0^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\cdot X_i^{\frac{\gamma\cdot(1-\gamma)}{\beta-\gamma}}$$

と表せることがわかる。$X_i=\left(\rho_0 e_0^\gamma+\rho Z^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$であったから，上記二つの式の辺々を加えれば，左辺はX_i^γになる。こうして得られた等式は

$$X_i^{\beta-1} = \left\{\rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\cdot v_0^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}+\rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n_i}\left(v_k a_k^{\frac{\beta}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}\right]^{\frac{\beta-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\right\}^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}}\cdot\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{1}{c}$$

のように整理できる。以下ではパラメータのみで構成された部分を

$$A_i = \left\{\rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\cdot v_0^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}+\rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\cdot\Xi_i^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\right\}^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}} \tag{8}$$

と表すことにしよう。ただし

$$\Xi_i = \left[\sum_{k=1}^{n_i}\left(v_k a_k^{\frac{\beta}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}\right]^{\frac{\beta-\sigma}{\sigma}}$$

である。この表現を用いることで，均衡における集団iの活動規模に関する次の等式を得る。

$$X_i^{\beta-1}=A_i\cdot\left(1-\frac{X_i}{X}\right)\cdot\frac{1}{X}\cdot\frac{1}{c}$$

以下ではA_iを集団iの**競争力指標**と呼ぶことにする。

こうして我々は，いわゆる「シェア関数アプローチ」を適用する手続きに進むことができる。まず$P_i=\frac{X_i}{X}$という表記を用いて，先ほど得た等式を

$$\frac{P_i^{\beta-1}}{1-P_i}\cdot X^\beta=\frac{A_i}{c} \tag{9}$$

と変形する。この等式の由来をひとまず忘れ，$P_i\geq 0$という値をXの関数として陰伏的に定義する式と見なす，というのが議論の第一歩である。この関数$P_i(X)$を集団iのシェア関数と呼ぶ。(9)式の右辺は定数であり，左辺はP_iとXの二変数連続関数であることから，シェア関数は連続関数になる。またこれら双方の変数について厳密な増加関数なので，$P_i(X)$は厳密な減少関数になる。さらに，$\lim_{X\to\infty}P_i(X)=0$と$\lim_{X\to 0}P_i(X)=1$が成り立つことを確認できる[8)]。

8） $\lim_{X\to\infty}P(X)=0$については(7)式から明らかだろう。また$P(X)$が減少関数であることから$\lim_{X\to 0}P(X)=\sup P(X)$とできる。$\sup P(X)=s<1$であると仮定しよう。全ての$X>0$について$\frac{P_i(X)^{\beta-1}}{1-P_i(X)}\cdot X^\beta\leq\frac{s^{\beta-1}}{1-s}\cdot X^\beta$が成り立つ。すると$0<X<\left(\frac{1-s}{s^{\beta-1}}\cdot\frac{A}{c}\right)^{\frac{1}{\beta}}$の場合に(9)式が成立しなくなって

コンテストに加わる全ての集団の活動水準の合計が X のときに，集団 i の全ての構成員が各々の効用最大化行動を選んでいるとすれば，(9)式の定義より $X_i = P_i(X) \cdot X$ が成り立たねばならない。均衡ではこの条件が全ての集団で満たされねばならないから，$X = \sum_{j=1}^{m} X_j$ であることより $X = X \cdot \sum_{j=1}^{m} P_j(X)$ が成り立たねばならない。そこで均衡における集団の活動水準の合計値 X^* は，等式 $\sum_{j=1}^{m} P_j(X^*) = 1$ を満たさなければならない。他方でこの等式が満たされるとき，$X_i^* = P_i(X^*) \cdot X^*$ としてやれば，そこから導出される各構成員の努力水準が効用最大化を満たすことがわかる[9)]。よって等式

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(X^*) = 1 \tag{10}$$

は，X^* が均衡における集団の活動水準の合計値であることの必要十分条件である。

先に確認した個別集団のシェア関数の性質から，$\sum_{j=1}^{m} P_j(X)$ は連続かつ厳密な減少関数になる。また，$\lim_{X \to \infty} \sum_{j=1}^{m} P_j(X) = 0$ と $\lim_{X \to 0} \sum_{j=1}^{m} P_j(X) = m$ が成り立つ。以上の性質から，図2に示されるように，均衡における集団の活動水準の合計値がただ一つ存在することが確認できる。これにより，我々のモデルの均衡の存在と一意性が証明されたことになる。

命題1． *第2節で記述された，明示的内部構造を持つ集団の間のコンテストのモデルには，均衡が一意に存在する。*

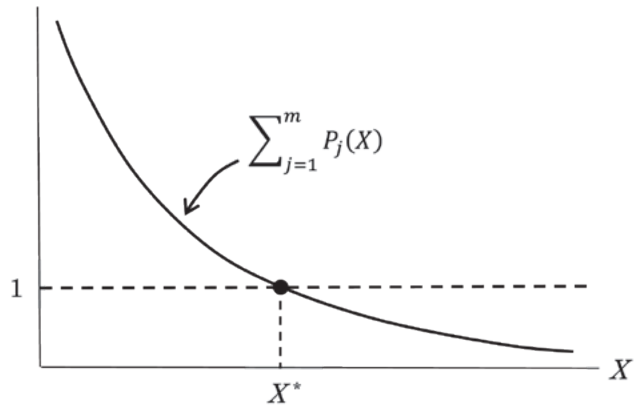

図2

しまい，$P(X)$ の定義と矛盾する。よって $\lim_{X \to 0} P(X) = 1$ でなければならない。

9）X^* と $X_i^* = P_i(X^*) \cdot X^*$ を用いて(7)式から求めた Z の値により(6)式から個人 k の努力水準を求めれば，(5)式を満たすものになっている。下位集団に属さない個人に対しても，同様の確認が可能である。

3. 最適報酬体系

シェア関数の定義式(9)と均衡の必要十分条件(10)を用いることにより，各集団の競争力指標と勝利確率の関係について以下のような結果が得られる。

補題1．*$A_i \geq A_j$ のとき，均衡における集団 i の勝利確率は集団 j 以上となる。不等号が厳密なものであれば，より大きくなる。さらに，A_i の値の上昇は均衡における集団 i の勝利確率を上昇させる。*

証明

均衡における集団 i の勝利確率は，均衡における集団の活動水準の合計値 X^* とシェア関数を用いて $P_i(X^*)$ と表せる。$A_i \geq A_j$ ならば(9)式による定義より，任意の X において $\frac{P_i(X)^{\beta-1}}{1-P_i(X)} \geq \frac{P_j(X)^{\beta-1}}{1-P_j(X)}$ が成り立つ。よって任意の X において $P_i(X) \geq P_j(X)$ が成り立つので $P_i(X^*) \geq P_j(X^*)$ も成り立つ。この議論は全ての不等号を厳密な不等号に置き換えても成立する。

次に集団 i の競争力指標について $A_i < \hat{A}_i$ という二つの値を考える。A_i に対応する集団 i のシェア関数を $P_i(X)$，$\hat{A}_i$ に対応するそれを $\hat{P}_i(X)$ で表すことにする。このとき(9)式による定義より，任意の X において $P_i(X) < \hat{P}_i(X)$ が成り立つ。そこで集団 i の競争力指標が A_i から $\hat{A}_i$ に変化することにより，均衡における集団の活動水準の合計値が X^* から X^{**} に変化したとしよう。

$$1 = \sum_{j=1}^{m} P_j(X^*) < \hat{P}_i(X^*) + \sum_{j \neq i} P_j(X^*)$$

であり，全ての集団のシェア関数は厳密な減少関数なのだから，$X^* < X^{**}$ が成り立たねばならない。$\sum_{j \neq i} P_j(X^*) > \sum_{j \neq i} P_j(X^{**})$ かつ $1 = \hat{P}_i(X^{**}) + \sum_{j \neq i} P_j(X^{**})$ であることを用いれば，$P_i(X^*) < \hat{P}_i(X^{**})$ が導かれる。 証明終

この補題より，ある集団の勝利確率はその競争力指標の値が大きくなるほど上昇することがわかる。競争力指標は集団構成員への報酬の分布により変化するので，我々は競争力指標の値を最大にするという意味で最適な報酬体系を考えることができる。すなわち集団 i の最適報酬体系は，$\sum_{k=0}^{n_i} v_k = V$ を制約条件として競争力指標 A_i の値を最大にするベクトル $\left(v_0, v_1, \ldots, v_{n_i}\right)$ だということになる。

以下では議論の簡単化のため，最適報酬体系の導出にあたり，次の正規性の条件を満たす場合のみを考えることにする。

正規性の条件：$\frac{\beta}{2} > \max\{\sigma, \gamma\}$

β の値が2より大きければ，この条件は任意の $\sigma \le 1$ と $\gamma \le 1$ の値について成立する。つまり努力の限界費用の逓増の程度が十分に大きい場合である。また，σ と γ の値が共に0.5未満であれば，つまり構成員の努力が相互に十分に補完的であれば，任意の $\beta \ge 1$ の値について成立する。

正規性の条件が成立するとき，競争力指標 A_i は $\left(v_0, v_1, \ldots, v_{n_i}\right)$ の凹関数になる[10)]。よって最大化問題

$$\max_{\left(v_0, v_1, \ldots, v_{n_i}\right)} A_i \quad \text{subject to} \quad \sum_{k=0}^{n_i} v_k = V, \quad v_0 \ge 0, v_1 \ge 0 \cdots, v_{n_i} \ge 0$$

の必要十分条件は，ラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = A_i - \lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{n_i} v_k - V\right) + \sum_{k=0}^{n_i} \delta_k v_k$$

により

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_0} = A_i^{\frac{\beta-2\gamma}{\beta-\gamma}} \cdot \rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot v_0^{\frac{2\gamma-\beta}{\beta-\gamma}} - \lambda + \delta_0 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} = A_i^{\frac{\beta-2\gamma}{\beta-\gamma}} \cdot \rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot \Xi_i^{\frac{\beta}{\beta-\sigma} \cdot \frac{\gamma-\sigma}{\beta-\gamma}} \cdot a_h^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}} \cdot v_0^{\frac{2\sigma-\beta}{\beta-\sigma}} - \lambda + \delta_0 = 0, \qquad h = 1, \ldots, n_i$$

および $\sum_{k=0}^{n_i} v_k = V$，$v_0 \ge 0, v_1 \ge 0 \cdots, v_{n_i} \ge 0$ である。これらの式に正規性条件を適用すれば，$v_k > 0$（$k = 0, 1, \ldots, n_i$）でなければならないことがわかる。よって

$$A_i^{\frac{\beta-2\gamma}{\beta-\gamma}} \cdot \rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot v_0^{\frac{2\gamma-\beta}{\beta-\gamma}} - \lambda = 0 \tag{11–1}$$

$$A_i^{\frac{\beta-2\gamma}{\beta-\gamma}} \cdot \rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot \Xi_i^{\frac{\beta}{\beta-\sigma} \cdot \frac{\gamma-\sigma}{\beta-\gamma}} \cdot a_h^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}} \cdot v_h^{\frac{2\sigma-\beta}{\beta-\sigma}} - \lambda = 0, \qquad h = 1, \ldots, n_i \tag{11–2}$$

$$\sum_{k=0}^{n_i} v_k = V \tag{11–3}$$

が得られる。

（11–2）式より

$$\frac{v_h}{v_1} = \left(\frac{a_h}{a_1}\right)^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}} \qquad h = 1, \ldots, n_i \tag{12}$$

という関係が成立せねばならないので，これを用いて

10） $\frac{\beta}{2} \ge \sigma$ より $\frac{\sigma}{\beta-\sigma} \le 1$ になるので，$\left[\sum_{k=1}^{n_i}\left(v_k a_k^{\frac{\beta}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\beta-\sigma}}\right]^{\frac{\beta-\sigma}{\sigma}}$ は $\left(v_1, \ldots, v_{n_i}\right)$ の凹関数になる。$\frac{\beta}{2} \ge \gamma$ より $\frac{\gamma}{\beta-\gamma} \le 1$ になるので，$\left\{\rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot v_0^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} + \rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot Z^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\right\}^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}}$ は (v_0, Z) の凹関数かつ増加関数である。よって(8)式より，A_i は $\left(v_0, v_1, \ldots, v_{n_i}\right)$ の凹関数になる。

$$\Xi_i^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}\cdot\frac{\gamma-\sigma}{\beta-\gamma}} \cdot a_1^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}} \cdot v_1^{\frac{2\sigma-\beta}{\beta-\sigma}} = \left[\sum_{k=1}^{n_i} \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right]^{\frac{\gamma-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot \frac{\left(a_1^{\frac{\beta}{\sigma}} v_1\right)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}}{v_1} \tag{13}$$

と表せる。$v_k > 0$（$k = 0, 1, \dots, n_i$）であることから

$$A_i^{\frac{\beta-2\gamma}{\beta-\gamma}} \cdot \rho_0^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot v_0^{\frac{2\gamma-\beta}{\beta-\gamma}} = \lambda = A_i^{\frac{\beta-2\gamma}{\beta-\gamma}} \cdot \rho^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \cdot \Xi_i^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}\cdot\frac{\gamma-\sigma}{\beta-\gamma}} \cdot a_h^{\frac{\beta}{\beta-\sigma}} \cdot v_h^{\frac{2\sigma-\beta}{\beta-\sigma}}$$

となるので，いま導いた等式を代入すれば

$$v_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}}{a_1^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\beta}{2\gamma-\beta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right)^{\frac{\gamma}{\sigma}\cdot\frac{\beta-2\sigma}{2\gamma-\beta}} \cdot v_1 \tag{14}$$

という関係が得られる。⑿式より $\sum_{k=1}^{n_i} v_k = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}}{a_1^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}} \cdot v_1$ であるから，（11–3）式より

$$v_h = \frac{a_h^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}} \cdot V}{\left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right) \cdot \left\{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\beta}{2\gamma-\beta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right)^{\frac{\beta-2\sigma}{\sigma}\cdot\frac{\beta}{2\gamma-\beta}}\right\}}, \quad h = 1, \dots, n_i \tag{15}$$

$$v_0 = \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\beta}{2\gamma-\beta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right)^{\frac{\beta-2\sigma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{2\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta}{\sigma}} \cdot V}{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\beta}{2\gamma-\beta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right)^{\frac{\beta-2\sigma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{2\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta}{\sigma}}} \tag{16}$$

という値が得られる。こうして最適報酬体系が導かれたことになる。

命題2. *正規性の条件が満たされるとき，集団の勝利確率を最大化する最適報酬体系は⒂式，⒃式で与えられる。*

4. 集団の内部構造と報酬体系

⒂式と⒃式で与えられた最適報酬構造が，集団の内部構造を表すパラメータとどのように関連しているかを見ていくことにする。まず，下位集団の個人間の貢献の補完性の変化が報酬体系に及ぼす影響を検討する。続いて，下位集団内の個人の能力の不均等の程度が報酬体系に及ぼす影響について調べることにする。

・下位集団内の個人間の補完性

下位集団内の個人の貢献の間の補完性は，パラメータ σ の値が小さくなるほど強ま

る。その影響を調べるには，下位集団の個人が同質的であるとしておくのが便利である。つまり，$a_k = a > 0$（$k = 1, \ldots, n_i$）とするわけである。このとき下位集団内の全ての個人に対する報酬が個人1への報酬 v_1 と等しい値になるのは，⑿式より明らかである。さらに⒁式を用いれば

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{\beta}{\beta-2\gamma}} \cdot n_i^{\frac{\beta}{\beta-2\gamma}} \cdot (n_i \cdot a)^{\frac{-\gamma}{\sigma} \cdot \frac{\beta}{\beta-2\gamma}} \tag{17}$$

という関係が導かれる。$\gamma > 0$ ならば，$n_i \cdot a > 1$ のとき左辺は σ の増加関数になり，$n_i \cdot a < 1$ のとき減少関数になる。$n_i \cdot a = 1$ のときは一定となる。我々は下位集団に属さない個人0の能力を1に標準化していたから，下位集団に属する個人の能力係数の合計が個人0のそれより大きいか否かによって，σ の変化が及ぼす効果が異なってくるという解釈ができる。そこで，以下のような結論が導かれる[11]。

命題3. *正規性の条件が満たされるとき，下位集団内の個人の貢献の間の補完性の上昇（σ の低下）が個人0の相対的報酬に及ぼす効果は，$\gamma > 0$ のとき以下のようになる。*

(a) *下位集団に属する個人の能力係数の合計が個人0のそれより大きい場合には低下する。*

(b) *下位集団に属する個人の能力係数の合計が個人0のそれより小さい場合には増加する。*

(c) *下位集団に属する個人の能力係数の合計が個人0のそれに等しい場合には変化しない。*

$\gamma < 0$ のとき，以上の結論は逆になる。

・下位集団内の能力のばらつき

下位集団内の能力の分布（$a_1, \ldots, a_{n_i}$）について，その平均値 $\frac{\sum_{k=1}^{n_i} a_k}{n_i}$ を一定としたとき，個人間の能力に差がない場合と差がある場合とで報酬額合計が大きくなるのはどちらだろうか。この問題を考えるには，まず能力のばらつきの尺度を定めておく必要がある。ここでは所得分布の不平等度を測る際に用いられる標準的な尺度であるローレンツ優位の概念によりばらつきの大きさを表すことにする。これは以下のようなものである。

$\hat{a}_1 \leq \cdots \leq \hat{a}_{n_i}$ かつ $\bar{a}_1 \leq \cdots \leq \bar{a}_{n_i}$，さらに $\sum_{k=1}^{n_i} \hat{a}_k = \sum_{k=1}^{n_i} \bar{a}_k$ であるような二つのベクトル（$\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n_i}$）と（$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n_i}$）を考える。これらにおいて

11）γ の変化の効果については，明確な結論は見出せなかった。

$$\forall l \leq n_i \qquad \sum_{k=1}^{l} \hat{a}_k \geq \sum_{k=1}^{l} \bar{a}_k$$

が成り立ち，さらに少なくとも一つの l については厳密な不等号が成立するとき，$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_i})$ はローレンツ優位の意味において $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_i})$ よりも不平等（ローレンツ劣化）であると言う。このことは任意の厳密に凸な一変数関数 f について $\sum_{k=1}^{n_i} f(\hat{a}_k) < \sum_{k=1}^{n_i} f(\bar{a}_k)$ が成り立つことと同値である（Dasgupta et. al.（1973））。

この結果を利用すれば以下の結論が得られる。

命題4．*正規性の条件が満たされるとき，下位集団内の個人の能力の分布 $(a_1, \dots, a_{n_i})$ がローレンツ劣化するにつれて個人0への報酬は低下する。*

証明

$f(a) = a^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}$，$G(y) = y^{\frac{\beta-2\sigma}{2\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta}{\sigma}}$ とおく。$\sigma > 0$ のとき正規性の条件より f は厳密な凸関数，G は減少関数になる。よって $G\left(\sum_{k=1}^{n_i} f(a_k)\right)$ は，下位集団内の個人の能力の分布 $(a_1, \dots, a_{n_i})$ がローレンツ劣化するにつれて低下する。$\sigma < 0$ のとき f は厳密な凹関数（$-f$ が厳密な凸関数），G は増加関数になる。よってこの場合も $G\left(\sum_{k=1}^{n_i} f(a_k)\right)$ は，下位集団内の個人の能力の分布 $(a_1, \dots, a_{n_i})$ がローレンツ劣化するにつれて低下する。$G\left(\sum_{k=1}^{n_i} f(a_k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n_i} a_k^{\frac{\beta}{\beta-2\sigma}}\right)^{\frac{\beta-2\sigma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{2\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta}{\sigma}}$ であるから，⒃式より求める命題を得る。

証明終。

下位集団の個人の間の能力のばらつきは，下位集団のインプットの生産を非効率なものにする。下位集団のインプットと個人0のインプットが補完的なため，前者の水準を維持するには報酬を大きくする必要が生じると考えられる。

5．結論

この論文では集団コンテストのモデルについて，競合する各集団が下位集団を包含するような内部構造を有する場合への拡張を行った。我々のモデルは一意な均衡を有するものであり，さらに各集団についてプライズ獲得の確率を最大にするという意味で最適な報酬体系を定めることができた。これにより，従来取り組むことが困難であった，集団の内部構造の変化がコンテストに勝利するための報酬にどのように影響するかという問題に答えることが可能になった。

本稿で検討した内部構造は，下位集団が一つだけという極めて単純なものであった。これを複数の下位集団を包含する場合に拡張することは難しくない。Kobayashi et.al.

(2023）は，さらに複雑な内部構造まで導入可能であること，異なる内部構造を有する集団の間のコンテストも分析可能であることなどを，一般的な枠組みの中で明らかにしている。現実において利益獲得のための活動を行っている組織の，内部構造の特徴の反映とその含意の分析が，今後のモデル分析による研究の課題である。

参考文献

Baik, Kyung H. 2008. "Contests with Group-Specific Public-Good Prizes." *Social Choice and Welfare*, 30: 103–117.

Cornes, Richard. 1993. "Dyke Maintenance and Other Stories: Some Neglected Types of Public Goods." *The Quarterly Journal of Economics*, 108: 259–271.

Cornes, Richard, and Roger Hartley. 2005. "Asymmetric Contests with General Technologies." *Economic Theory*, 26: 923–946.

Cornes, Richard, and Roger Hartley. 2007. "Weak Links, Good Shots and Other Public Good Games: Building on BBV." *Journal of Public Economics* 91. 1684–1707.

Crutzen, Benoit, S., Sabine Flamand, and Nicolas Sahuguet. 2020. "A Model of a Team Contest, with an Application to Incentives under List Proportional Representation." *Journal of Public Economics* 182. 104109.

Dasgupta, Partha, Amartya Sen, and David Starrett. 1973. "Notes on the Measurement of Inequality." *Journal of Economic Theory*, 6: 180–187.

Epstein, Gil S., and Yosef Mealem. 2009. "Group Specific Public Goods, Orchestration of Interest Groups and Free Riding." *Public Choice* 139: 357–369.

Esteban, Joan-Maria, and Debraj Ray. 2001. "Collective Action and the Group Size Paradox." *American Political Science Review* 95: 663–72.

Esteban, Joan-Maria, and Debraj Ray. 2011. "A Model of Ethnic Conflict." *Journal of the European Economic Association*. 9: 1496–1521.

Hirshleifer, J. 1983. "From Weakest-link to Best-shot: the Voluntary Provision of Public Goods." *Public Choice* 41: 371–386.

Katz, E., Nitzan, S., and J. Rosenberg 1990. "Rent-seeking for pure public goods." *Public Choice* 65: 49–60.

Kobayashi, Katsuya, and Hideo Konishi. 2021. "Effort Complementarity and Sharing Rules in Group Contests," *Social Choice and Welfare* 56: 205–221.

Kobayashi, Katsuya, Hideo Konishi and Kaoru Ueda. 2023. "Prize-Allocation Rules in Generalized Team Contests," Mimeo.

Kolmar, Martin and Hendrik Rommeswinkel. 2013. "Contests with Group-specific Public Goods and Complementarities in Efforts." *Journal of Economic Behavior & Organization*. 89: 9–22.

Konrad, Kai A. 2009. *Strategy and Dynamics in Contests*. New York: Oxford University Press.

Nitzan, Shmuel. 1991. "Collective Rent Dissipation. *Economic Journal* 101: 1522–34.

Nitzan, Shmuel, and Kaoru Ueda. 2014. "Intra-group Heterogeneity in Collective Contests." *Social Choice and Welfare*, 43: 219–238.

Ryvkin, Dmitry. 2011. "The optimal sorting of players in contests between groups." *Games and Economic Behavior*, 73: 564–572.

Sato, Kazuo. 1967. "A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function." *Review of Economic Studies*, 34: 201–18.

Tullock, Gordon. 1980. "Efficient Rent Seeking," Buchanan, J.M., Tollison, R.D., Tullock, G. (Eds.), *Toward a Theory of the Rent-Seeking Society*, Texas A&M University Press, College Station, TX, pp. 97–112.

（上田　薫，E-mail: k-ueda@ic.nanzan-u.ac.jp）