

ロバストリッジ回帰推定量とそのシミュレーション評価

武山 嵩弘¹ 木村 美善²

概要

線形回帰において、多重共線性だけでなく外れ値も存在する場合に、最小 2 乗推定量に基づく通常のリッジ回帰推定量はうまく機能しない。本論文では、ロバスト回帰推定量 (LMS, LTS, GS, DR) に基づくリッジ回帰推定量を提案し、これらが多重共線性と外れ値が混在するデータに対して有効であることをシミュレーションにより明らかにする。

1 はじめに

線形回帰モデルにおいて、通常よく用いられる最小 2 乗推定量は標準的仮定の下では最良線形不偏となり、望ましい推定量である。しかし、最小 2 乗推定量は多重共線性や外れ値が存在する場合には不安定になり、その良さを失ってしまうことが知られている。説明変数間に強い線形関係が存在する多重共線性の問題に対して、Hoerl and Kennard (1970a, 1970b) は回帰推定量の安定化をはかるため、パラメータ $k > 0$ を持つリッジ回帰推定量を提案し、その特徴と有効性を明らかにした。リッジ回帰推定量は偏りをもつ推定量であるが、適切な k を選ぶことによって最小 2 乗推定量よりも小さい平均 2 乗誤差をもつようにすることができる。しかし、このリッジ回帰推定量は最小 2 乗推定量を縮小して作られているため、外れ値に有効に対処できるようになっておらず、その影響を受けやすいという欠点がある。したがって、多重共線性と外れ値が同時に生じる場合には、最小 2 乗推定量に基づくリッジ回帰推定量は好ましくない。

Silvapulle (1991) は多重共線性と外れ値が混在する場合に、最小 2 乗推定量の代わりに M 推定量を用いたリッジ回帰推定量を提案し、その有効性を示した。しかし、このリッジ回帰推定量は M 推定量に基づいていることから、誤差の外れ値に対しては有効であるが、説明変数の外れ値に対しては依然としてうまく対応できていない。

本論文の目的は、ロバスト回帰推定量のうち、LMS 推定量、LTS 推定量、GS 推定量、DR (最深回帰) 推定量を縮小して得られるリッジ回帰推定量を提案し、これらが多重共線性と外れ値が混在するデータに対して極めて有効であることをシミュレーションにより明らかにすることである。

2 線形回帰モデル

2.1 最小 2 乗推定量

応答変数 y と p 個の説明変数 x_1, x_2, \dots, x_p に関する n 個の観測値 $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$, $i = 1, \dots, n$ が与えられているとし、線形回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \quad (1)$$

を考える。ここで、 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ は回帰係数、 ε_i は誤差を表す。このモデルを行列で表記すると

¹南山大学数理情報研究科 E-mail : m06mm031@nanzan-u.ac.jp

²南山大学数理情報学部 E-mail : kimura@ms.nanzan-u.ac.jp

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

となる。ただし

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}.$$

このとき、 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ の最小 2 乗 (OLS: Ordinary Least Square) 推定量は、(1) 式のモデルにおける残差平方和 $(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta})$ を最小にする

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y} \quad (3)$$

である。OLS 推定量は、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ が $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$, $V[\boldsymbol{\varepsilon}] = \sigma^2 I$ (I は単位行列) を満たすとき最良線形不偏推定量であり、さらに正規分布に従うときには最良不偏推定量となる。しかし、こうした標準的仮定からの「ずれ」が生じたり、外れ値や多重共線性が存在したりする場合には、OLS 推定量はその「良さ」を失ってしまうことが知られている。そして、実際のデータ分析においては、標準的仮定は近似的にしか満たされないことが多い。

2.2 リッジ回帰推定量

$X'X$ の固有値を $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{p+1} \geq 0$ とする。このとき、回帰係数 $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の平均 2 乗誤差 (MSE: Mean Squared Error) は

$$MSE[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = E[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i^{-1} \quad (4)$$

と表される。ここで、 σ^2 は誤差分散を表す。MSE は真のパラメータまわりの推定量のばらつきを表すものであるから、可能な限り小さいことが期待される。しかし、データに多重共線性の問題があるとき、固有値 λ には極めて 0 に近いものが存在するため、(4) 式で計算される OLS 推定量の MSE は大きく発散しまう恐れがある。

そこで、Hoerl and Kennard (1970a) はモデルにリッジパラメータとよばれる定数 $k \geq 0$ を取り入れ、(3) 式の OLS 推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を縮小することによって回帰係数の安定化をはかるリッジ回帰 (ORR: Ordinary Ridge Regression) の方法を提案した。提案された推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_k = (X'X + kI)^{-1}X'\mathbf{y} \quad (5)$$

である。 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$ は $k > 0$ のときバイアスを伴うため不偏推定量とはならないが、説明変数間に多重共線性の問題があるとき、 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ よりも小さい MSE を与える k が存在する。 $k = 0$ のとき、 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$ は最小 2 乗推定量に一致することに注意しよう。

2.3 M 推定量に基づくリッジ回帰推定量

重回帰分析において、ORR を用いることにより多重共線性が生じた際でも変数選択を行わずに安定した係数を推定することが可能となるが、データに外れ値がある場合には OLS

と同様にその影響を強く受け、分析が困難となってしまう。この問題への対処法として、Silvapulle (1991) は ORR における OLS 推定量 $\hat{\beta}$ を M 推定量 $\hat{\beta}^M$ で置き換えた次のリッジ型 M (RM : Ridge-type M) 推定量

$$\hat{\beta}_k^M = (X'X + kI)^{-1}X'X\hat{\beta}^M \quad (6)$$

を提案した。この推定量を用いることにより、多重共線性の問題に加え、誤差項の一部が正規分布よりも裾の長い分布に従うような場合についても、それほど性能を損なわずに分析を行うことが可能となる。

2.4 ロバストリッジ回帰推定量

RM 推定量を含め、これまでに提案されたリッジ回帰推定量は、いずれも y 方向の外れ値に対してのみ頑健であるような推定量を縮小することにより得られたものである。そのため、これらの推定量は、仮定された分布からの「ずれ」がモデルの誤差項に現れるときには有効に働くが、依然として X 方向の外れ値に対しては全く対応できていない。

そこで、我々は誤差項の外れ値に加えて説明変数項の外れ値に対してもうまく対処できるように、(6) 式を一般化し、次のロバストリッジ回帰 (RRR : Robust Ridge Regression) 推定量

$$\hat{\beta}_k^{rob} = (X'X + kI)^{-1}X'X\hat{\beta}^{rob} \quad (7)$$

を提案する。ここで、 $\hat{\beta}^{rob}$ は M 推定量 $\hat{\beta}^M$ を含めた種々のロバスト推定量を表す。ロバスト推定量にはそれぞれの長所と短所があり、分析対象のデータによって、それに適したものとそうでないものがある。したがって、実際の分析においては、外れ値の割合やその大きさ・方向などを調べることにより、まずデータの特徴を捉え、それに適したロバスト推定量 $\hat{\beta}^{rob}$ を選ぶことが重要になる。本論文では、 $\hat{\beta}^{rob}$ として LMS, LTS, GS, DR 推定量を用いた RRR 推定量を取り上げ、シミュレーション評価する。

3 縮小されるロバスト推定量

3.1 M 推定量 $\hat{\beta}^M$

M 推定量は、Huber (1964) によって提案されたロバスト推定量の中でも最も一般的なものであり、微分可能な偶関数 ρ を用いて

$$\hat{\beta}^M = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n \rho(r_i), \quad r_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip}) \quad (8)$$

として定義される。関数 ρ としてはこれまでに様々なものが提案されているが、 $\rho(r_i) = r_i^2$ とすると、これは OLS 推定量に等しい。

3.2 LMS 推定量 $\hat{\beta}^{LMS}$

LMS (Least Median of Squares) 推定量は、Hampel (1975) によって提案され、それをさらに Rousseeuw (1984) が発展させたものであり、残差平方の中央値を最小にする

$$\hat{\beta}^{LMS} = \arg \min_{\beta} \text{med}(r_1^2, \cdots, r_n^2) \quad (9)$$

として定義される。破綻点は $([n/2] - p + 2)/n$ であり、 $n \rightarrow 0$ のとき $1/2$ となる。LMS 推定量は y 方向のみでなく X 方向に対してもロバストであるが、漸近効率は高くない。

3.3 LTS 推定量 $\hat{\beta}^{LTS}$

LTS (Least Trimmed Squares) 推定量は、Rousseeuw (1984) によって提案されたものであり、残差平方を昇順に並び替えた順序統計量の m 番目までの和を最小にする

$$\hat{\beta}^{LTS} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^m r_{(i)}^2 \quad (10)$$

として定義される。(10) 式からもわかるように、LTS 推定量は m 番目以降の残差平方和を無視した OLS 推定量であるという見方もできる。

3.4 GS (Generalized S) 推定量 $\hat{\beta}^{GS}$

S 推定量を一般化するものとして、Croux et al. (1994) によって GS (Generalized S) 推定量が提案された。S 推定量では、尺度の M 推定量である s を残差に基づいて求めていたが、GS 推定量の場合の s は残差の差に基づいて得られる。すなわち、 β の GS 推定量は

$$\left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{i < j} \rho \left(\frac{r_i - r_j}{s} \right) = k_{n,p} \quad (11)$$

の解として求めた s を用いて

$$\hat{\beta}^{GS} = \arg \min_{\beta} s(r_1, \dots, r_n) \quad (12)$$

により定義される。GS 推定量は漸近効率を犠牲にすることなく高い頑健性をもつが、その一方で残差の差を用いるため、データ数が大きくなると計算に時間が掛かってしまうという問題点がある。

3.5 DR (最深回帰) 推定量 $\hat{\beta}^{DR}$

Rousseeuw and Hubert (1999) により、Regression Depth という新しい概念に基づいて提案されたのが DR (最深回帰) 推定量である。破綻点は

$$\frac{1}{p+2} \leq \epsilon_n^* \leq \frac{1}{3} \quad (13)$$

でありそれほど高くないが、OLS に対する相対効率はデータ数によらず非常に高いことが知られている。

$p+1$ 次元のデータ集合 $Z_n = \{z_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip}, y_i); i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$ に対し、 $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ を当てはめ、 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ に対する z_i の残差を $r_i = r_i(\beta)$ とする。このとき、 Z_n に対する β の $rdepth(\beta, Z_n)$ は

$$rdepth(\beta, Z_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \min \{ S^+(x_i) + G^-(x_i), G^+(x_i) + S^-(x_i) \} \} \quad (14)$$

として定義される. ただし,

$$S^+(v) = \#\{i; x_i \leq v \text{ and } r_i \geq 0\}, \quad G^-(v) = \#\{i; x_i > v \text{ and } r_i \leq 0\},$$

$$G^+(v) = \#\{i; x_i \geq v \text{ and } r_i \geq 0\}, \quad S^-(v) = \#\{i; x_i < v \text{ and } r_i \leq 0\}.$$

これにより, DR 推定量は $rdepth(\beta, Z_n)$ を最大にする

$$\hat{\beta}^{DR} = \arg \max_{\beta} rdepth(\beta, Z_n) \quad (15)$$

として定義される.

4 RRR 推定量の適用例

(7) 式によって定義した RRR 推定量を用いて, 1996 年の米国内における 1 家族の労働時間と収入に関するデータを分析した例を示す. オリジナルのデータ³ は 10 変数から構成されているが, そのうち 4 変数は欠損値を含むため, ここでは表 1 に示す 6 変数のみを分析対象とする.

表 1: 変数 : 賃金と時間のデータ

x_1	WAGE	平均時間給 (\$)
x_2	NEIN	平均年間非給与所得 (\$)
x_3	ASSET	家族が保有する資産 (\$)
x_4	AGE	回答者の平均年齢
x_5	SCHOOL	高等教育修了者の割合 (%)
y	HRS	その年の平均労働時間

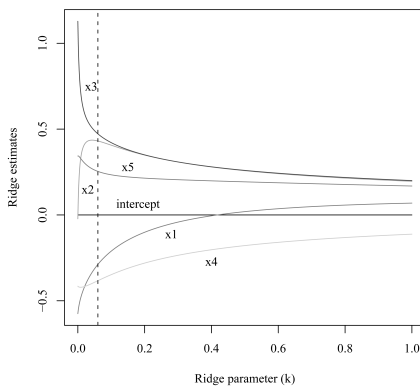


図 1: ORR のリッジトレース

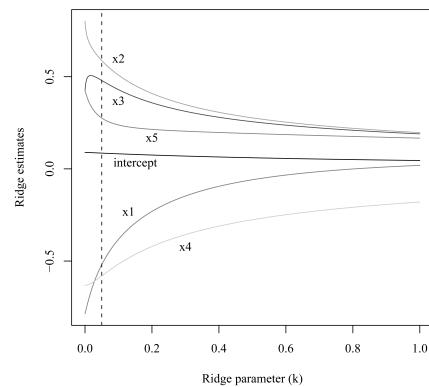


図 2: RM のリッジトレース

図 1 ~ 4 に, ORR, RM, さらに LMS, GS 推定量に基づく RRR によるリッジトレースを示した. ただし, このトレースにおける横軸と縦軸は, それぞれリッジパラメータ k の値と

³DASL Project, *The Data and Story Library*, <http://lib.stat.cmu.edu/DASL/>

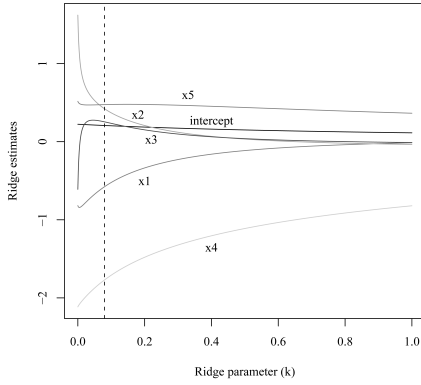


図 3: RRR(LMS) のリッジトレース

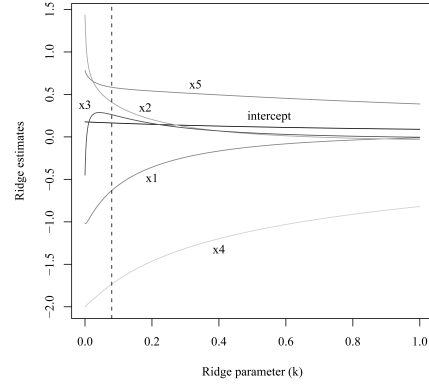


図 4: RRR(GS) のリッジトレース

標準化した係数推定値 $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_5)'$ を表している。これを見ると、変数 x_2 と x_3 に対する係数推定値が、ORR とそれ以外の RM を含む RRR では収束の仕方が逆で異なっていることがわかる。また、トレースにおける $\tilde{\beta}_4$ の軌跡に着目すると、ORR, RM では $k = 0$ のとき $\tilde{\beta}_1$ よりも大きな値をとっているのに対し、LMS, GS 推定量に基づく RRR の方の $\tilde{\beta}_4$ は $k = [0, 1]$ の区間で常に最小である。さらに、前者の $\tilde{\beta}_4$ のカーブは $\tilde{\beta}_1$ の軌跡に比べて緩やかであるが、後者ではほぼ平行したカーブを描いている。これは、変数 x_4 に外れ値が存在しており、ORR 推定量, RM 推定量は x 軸方向の外れ値に対して頑健ではないためであると思われる。

5 シミュレーション

OLS 推定量を縮小することによって得られる ORR と Silvapulle (1991) が提案した M 推定量に基づく RRR のひとつである RMに加え、本論文で新たに提案する 4 つのロバスト推定量を縮小した RRR を用いて、データにおける多重共線性や外れ値がそれぞれの推定精度にどの程度影響を及ぼすかをシミュレーションにより検証する。なお、データ作成法については Kibria (2003) を参考にし、計算にはオープンソースの統計解析環境『R』を使用した。

5.1 データ作成法

作成するデータが p 個の説明変数を持ち、 n 個の観測値からなるものとし、 $l = \lfloor p/2 \rfloor$ とする。標準正規分布に従う擬似乱数 z_1, \dots, z_{p+1} 、定数 γ を用いて、まず説明変数 x_1, \dots, x_p を次のように作成する：

$$z_{i1}, \dots, z_{i,p+1} \sim N(0, 1), \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_{ij} = z_{ij}, & j = 1, \dots, l \\ x_{ij} = (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} z_{ij} + \gamma z_{i,p+1}, & j = l + 1, \dots, p. \end{cases} \quad (17)$$

これにより, x_1, \dots, x_l を独立した変数とし, x_{l+1}, \dots, x_p には互いに相関関係を持たせてある. 応答変数は

$$y_i = x_{i1} + \dots + x_{ip} + 1 + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, 0.1) \quad (18)$$

とし, 切片項も含めて真の係数 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ が全て 1 となるように設定した.

このデータをベースとして, ある定数 η の割合で正規分布よりも裾の長いコーシー分布を混合することにより, さらに外れ値を加えていく. 誤差項に外れ値を与える場合には

$$y_i = x_{i1} + \dots + x_{ip} + 1 + E_i, \quad E \sim (1 - \eta) \cdot N(0, 0.1) + \eta \cdot t(1) \quad (19)$$

とし, 説明変数項に外れ値を与える場合には, 応答変数のデータを先に作成した後, $1 \leq j \leq l$ を満たす奇数 j に対する x_{ij} のみを

$$x_{ij} = E_i, \quad E \sim (1 - \eta) \cdot N(0, 1) + \eta \cdot t(1) \quad (20)$$

と置き換える.

5.2 シミュレーションの手順

このシミュレーションで扱う推定量は, それぞれ OLS, M 推定量に基づく ORR, RM 推定量, および LMS, LTS, GS, DR 推定量に基づく RRR の 6 種類とする. なお, GS 推定量の計算には金子 (2007) によるプログラム, DR 推定量の計算には大見他 (2007) により『R』で使用可能となった Medsweep プログラムを用いた.

説明変数の次元は $p = 3, 5, 10$ の 3 通りを考え, データ数 n については $n = 20, 50, 100, 500$ の 4 通りを調べる ($p = 10$ のときは $n = 50, 100, 500$ の 3 パターンのみ). また, 汚染の割合 η は $\eta = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ と変化させたが, 相関の強さに関与する γ については, 事前に行った小規模なシミュレーション実験により, 調査対象である推定量間の関係性にはあまり影響しないという結果が得られたため, $\gamma = 0.99$ に固定している. リッジパラメータ k については, 推定値ごとにその値を特定せず

$$k = \text{seq}(0, n, n/100) \quad (21)$$

として一定の範囲内を動かすことにした. ここで, $\text{seq}(a, b, c)$ は初項 a , 末項 b , 公差 c の等差数列を表す. シミュレーション回数, すなわち実験のサンプル数 m は原則として $m = 10000$ とするが, $n = 500$ のときの GS 推定量に基づく RRR 推定量については計算にかなりの時間を要するため, $m = 2000$ とするにとどめた. しかし, おおよその傾向を見るにはこれで十分であろう.

推定量の良さを測る基準としては MSE を用いた. このシミュレーションではパラメータ β の真値がわかっているため, j 回目のシミュレーションにおける各 RRR 推定量を $\hat{\beta}(k)^j = (\hat{\beta}(k)_0^j, \hat{\beta}(k)_1^j, \dots, \hat{\beta}(k)_p^j)'$ とするとき, $\hat{\beta}(k)$ の MSE は

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p (\hat{\beta}(k^*)^j_i - 1)^2 \quad (22)$$

として計算される. ここで, k^* は各回のシミュレーションで, (22) 式における i に関する和を最小にする k の値であり, j の関数である.

5.3 結果と考察

表2~4に、シミュレーションの全結果を示した。なお、MSEの値はすべて有効桁数3の指数表示に統一している。これを見ると、ORR推定量は裾の長い分布をわずかに1割混合しただけでも非常に大きな影響を受けてしまい、外れ値の存在する方向に関わらず簡単に破綻してしまうことがわかる。しかし、当然のことながら、分布の混合が全くない場合のMSEは常に最小の値を示しており、正規性の仮定が満たされるならば真値に最も近い推定値を得られる可能性が高い。一方、RM推定量は外れ値の存在が誤差項のみであり分布混合の割合がそれほど高くなければ非常に有用な推定量となる。しかし、分布混合の割合が高くなるにつれ次第にその性能は低下してしまい、外れ値が説明変数項に存在する場合には、ORR同様わずかな汚染によってすぐに破綻してしまう。LMS, LTS推定量に基づくRRR推定量は、誤差項または説明変数項いずれの外れ値に対してもデータ数や次元によらず高い頑健性を示した。しかし、 $\eta = 0$ における結果からもわかるように、漸近効率が悪いという欠点も示唆される。GS推定量に基づくRRR推定量はデータ数や次元、外れ値の方向などによらず常に高い有効性を示しており、いかなる場合においても大きな欠点は見当たらない。さらにこの推定量には、データがすべて正規分布に従うときよりも裾の長い分布が少し混合されているとき($\eta = 0.2, 0.3$ のとき)の方が小さいMSEを与えるという特性がある。これに対し、DR推定量に基づくRRR推定量はLMS, LTS, GS推定量に基づくRRRのような高い頑健性こそないものの、低次元で且つデータ数が小さすぎないとき、 $\epsilon = 0$ でのMSEの値は極めて小さい。したがって、この推定量は分布混合による汚染がわずかな場合には、GS推定量に基づくRRRに優るものとなりうる。

6 おわりに

本論文では、代表的な4つのロバスト回帰推定量(LMS, LTS, GS, DR)に基づくリッジ回帰推定量を新たに提案した。そして、多重共線性に加えて外れ値も含むデータに対して従来のリッジ回帰推定量ではうまく対処できず、提案したリッジ回帰推定量が極めて有効に機能することをシミュレーションにより明らかにした。また、4つのリッジ回帰推定量には、縮小させるロバスト推定量に応じたそれぞれの特徴と良さが見られることも確認した。GS推定量に基づくリッジ回帰推定量については計算時間がかなりかかり、大標本の分析には問題点があるものの、有効性と頑健性の両面から総合的に評価すると、最もバランスの良い推定量であると思われる。また、最深回帰推定量に基づくリッジ回帰推定量はモデルからの「ずれ」が小さい場合や大標本の場合に優れていることも明らかになった。本論文では、新たに提案したロバストラッジ回帰推定量の理論的な考察は行なっておらず、これは今後の課題である。

表 2: 実験結果 : 誤差項に外れ値

n	20										50																
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4							
p = 3	ORR	RM	1.86E-3	8.60E+2	8.07E+2	2.59E+2	3.45E+4	9.10E-4	2.73E+1	7.39E+0	9.10E-4	2.73E+1	7.39E+0	9.88E+2	6.02E+2	1.93E-3	3.15E+2	1.06E+2	3.81E-2	8.85E-2	3.45E+4	9.10E-4	2.73E+1	7.39E+0	9.88E+2	6.02E+2	
		RRR	5.69E-3	6.01E-3	6.23E-3	6.72E-3	7.84E-3	8.54E-3	9.38E-3	1.01E-2	1.03E-1	1.06E-3	1.19E-3	1.24E-3	1.32E-3	1.40E-3	1.46E-3	1.52E-3	1.58E-3	1.64E-3	1.70E-3	1.76E-3	1.82E-3	1.88E-3	1.94E-3	2.00E-3	
	LMS	RRR	4.84E-3	5.06E-3	4.90E-3	4.80E-3	4.75E-3	4.75E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	4.77E-3	
		RRR	3.52E-3	3.38E-3	3.04E-3	3.18E-3	1.40E-2	3.18E-3	1.75E-3	1.52E-3	1.32E-3	1.75E-3	1.52E-3	1.32E-3	1.31E-3	2.19E-3	4.65E-3	1.00E-2	1.91E-2	4.73E-2	1.03E-1	1.73E+2	1.19E-3	8.45E+1	7.14E+0	1.06E+1	1.06E+4
	ORR	RRR	2.67E-3	1.32E+1	1.01E+2	1.49E+2	1.73E+2	1.49E+2	1.19E-3	8.45E+1	7.14E+0	1.19E-3	8.45E+1	7.14E+0	1.06E+1	1.06E+4	2.76E-3	5.16E-3	2.80E-2	9.42E-2	1.74E-1	1.74E-1	1.24E-3	1.78E-3	3.23E-3	1.86E-2	7.92E-2
		RRR	7.84E-3	8.90E-3	9.82E-3	1.52E-2	3.50E-2	6.38E-3	3.32E-3	3.34E-3	3.23E-3	3.45E-3	3.44E-3	3.45E-3	3.50E-3	3.71E-3											
	p = 5	LMS	RRR	6.05E-3	6.32E-3	6.30E-3	6.38E-3	2.63E-2	3.32E-3	3.34E-3	3.23E-3	3.32E-3	3.34E-3	3.23E-3	3.19E-3	3.25E-3	5.05E-3	4.93E-3	4.59E-3	5.90E-3	4.90E-2	2.24E-3	2.05E-3	1.77E-3	1.69E-3	3.41E-3	3.41E-3
			RRR	1.27E-2	1.69E-2	2.04E-1	3.69E-1	1.76E-1	3.69E-1	2.55E-3	3.58E-3	6.39E-3	2.55E-3	3.58E-3	6.39E-3	1.63E-2	5.34E-2										
	p = 10	ORR	RRR	-	-	-	-	-	1.59E-3	9.76E+1	4.49E+3	1.59E-3	9.76E+1	4.49E+3	2.23E+2	2.35E+3	1.65E-3	2.43E-3	7.93E-3	7.93E-3	6.61E-2	1.65E-3	2.43E-3	7.93E-3	6.61E-2	1.82E-1	
			RRR	-	-	-	-	-	4.46E-3	4.65E-3	5.02E-3	4.46E-3	4.65E-3	5.02E-3	5.88E-3	1.10E-2											
p = 10	LMS	RRR	-	-	-	-	-	4.05E-3	4.22E-3	4.44E-3	4.05E-3	4.22E-3	4.44E-3	5.32E-3	1.01E-2	3.10E-3	2.94E-3	2.60E-3	2.60E-3	2.60E-3	3.10E-3	2.94E-3	2.60E-3	2.38E-3	1.54E-2	1.54E-2	
		RRR	-	-	-	-	-	5.68E-3	1.16E-2	3.49E-2	5.68E-3	1.16E-2	3.49E-2	9.25E-2	2.08E-1												
p = 3	ORR	RM	5.29E-4	5.33E+0	1.35E+1	2.95E+2	5.31E+2	1.60E-4	4.91E+2	1.46E+1	1.60E-4	4.91E+2	1.46E+1	8.41E+2	4.66E+4	5.50E-4	8.09E-4	1.38E-3	3.45E-3	1.84E-2	1.68E-4	2.71E-4	5.24E-4	1.33E-3	6.95E-3	6.95E-3	
		RRR	1.80E-3	1.77E-3	1.78E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.80E-3	1.77E-3	1.78E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3											
	LMS	RRR	1.89E-3	1.86E-3	1.79E-3	1.71E-3	1.56E-3	1.71E-3	8.55E-4	8.17E-4	7.87E-4	8.55E-4	8.17E-4	7.66E-4	8.09E-4	1.08E-3	9.04E-4	7.86E-4	7.62E-4	1.20E-3	3.69E-4	2.74E-4	2.48E-4	2.37E-4	3.23E-4	3.23E-4	
		RRR	1.01E-3	1.29E-3	1.71E-3	2.49E-3	4.49E-3	2.49E-3	3.12E-4	4.04E-4	5.73E-4	3.12E-4	4.04E-4	5.73E-4	8.57E-4	1.52E-3											
	ORR	RRR	6.82E-4	5.05E+0	4.96E+0	3.19E+2	1.67E+3	3.19E+2	2.04E-4	3.74E+0	8.29E+1	2.04E-4	3.74E+0	8.29E+1	2.07E+1	4.50E+1	7.02E-4	1.04E-3	1.77E-3	5.67E-3	4.57E-2	2.11E-4	3.34E-4	6.20E-4	1.59E-3	1.67E-2	
		RRR	2.22E-3	2.25E-3	2.29E-3	2.34E-3	2.58E-3	2.34E-3	1.11E-3	1.15E-3	1.28E-3	1.11E-3	1.15E-3	1.28E-3	1.47E-3	1.78E-3											
	p = 5	LMS	RRR	2.30E-3	2.33E-3	2.31E-3	2.33E-3	2.47E-3	1.17E-3	1.23E-3	2.47E-3	1.17E-3	1.23E-3	2.47E-3	1.48E-3	1.77E-3	1.35E-3	1.20E-3	9.90E-4	9.72E-4	1.64E-3	4.29E-4	3.45E-4	3.00E-4	2.84E-4	4.74E-4	4.74E-4
			RRR	1.33E-3	1.74E-3	2.32E-3	3.86E-3	1.24E-2	3.86E-3	3.96E-4	5.14E-4	7.04E-4	3.96E-4	5.14E-4	7.04E-4	1.04E-3	1.80E-3										
	p = 5	ORR	RRR	8.61E-4	1.24E+1	2.98E+1	5.03E+1	3.10E+2	2.32E-4	3.43E+0	1.03E+4	2.32E-4	3.43E+0	1.03E+4	1.31E+4	4.01E+3	8.93E-4	1.26E-3	2.22E-3	1.64E-2	1.11E-1	2.41E-4	6.55E-4	6.55E-4	1.79E-3	4.63E-2	4.63E-2
			RRR	2.82E-3	2.98E-3	3.37E-3	4.21E-3	6.90E-3	4.21E-3	1.72E-3	2.04E-3	2.48E-3	1.72E-3	2.04E-3	2.48E-3	3.33E-3	5.50E-3										
p = 10	LMS	RRR	2.83E-3	2.96E-3	3.33E-3	4.14E-3	6.72E-3	1.77E-3	2.07E-3	2.49E-3	1.77E-3	2.07E-3	2.49E-3	3.32E-3	5.46E-3	1.72E-3	1.52E-3	1.27E-3	1.19E-3	2.69E-3	5.21E-4	3.98E-4	3.27E-4	3.33E-4	6.50E-4	6.50E-4	
		RRR	1.89E-3	2.58E-3	4.38E-3	1.55E-2	7.56E-2	1.55E-2	4.66E-4	5.84E-4	7.88E-4	4.66E-4	5.84E-4	7.88E-4	1.18E-3	2.25E-3											

表 3: 実験結果：説明変数項に外れ値

n	20										50										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	
p = 3	ORR	RM	1.86E-3	8.38E-2	1.50E-1	1.99E-1	2.37E-1	1.99E-1	1.90E-1	2.42E-1	9.10E-4	1.03E-1	1.72E-1	2.17E-1	2.50E-1	9.10E-4	1.03E-1	1.72E-1	2.17E-1	2.50E-1	
		RRR	1.93E-3	4.54E-2	1.19E-1	1.90E-1	2.42E-1	1.99E-1	1.90E-1	2.42E-1	9.38E-4	4.56E-2	1.27E-1	2.06E-1	2.60E-1	9.38E-4	4.56E-2	1.27E-1	2.06E-1	2.60E-1	
	LMS	RM	5.69E-3	5.74E-3	6.05E-3	7.85E-3	3.27E-2	4.85E-3	3.35E-3	3.27E-2	2.81E-3	2.51E-3	2.40E-3	2.32E-3	3.90E-3	2.81E-3	2.51E-3	2.40E-3	2.32E-3	3.90E-3	
		RRR	4.84E-3	4.69E-3	4.48E-3	4.85E-3	1.77E-2	4.85E-3	3.35E-3	1.77E-2	2.77E-3	2.50E-3	2.35E-3	2.16E-3	3.74E-3	2.77E-3	2.50E-3	2.35E-3	2.16E-3	3.74E-3	
	GS	RM	3.52E-3	3.16E-3	2.75E-3	3.35E-3	9.22E-2	3.35E-3	3.35E-3	9.22E-2	1.75E-3	1.39E-3	1.17E-3	1.20E-3	3.11E-2	1.75E-3	1.39E-3	1.17E-3	1.20E-3	3.11E-2	
		RRR	4.65E-3	7.79E-3	2.36E-2	7.08E-2	1.48E-1	7.08E-2	7.08E-2	1.48E-1	1.74E-3	2.10E-3	3.36E-3	1.20E-2	7.30E-2	1.74E-3	2.10E-3	3.36E-3	1.20E-2	7.30E-2	
	DR	RM	2.67E-3	8.55E-2	1.49E-1	2.01E-1	2.55E-1	2.01E-1	2.01E-1	2.55E-1	1.19E-3	8.69E-2	1.47E-1	1.98E-1	2.43E-1	1.19E-3	8.69E-2	1.47E-1	1.98E-1	2.43E-1	
		RRR	2.76E-3	4.11E-2	1.07E-1	1.81E-1	2.54E-1	1.81E-1	1.81E-1	2.54E-1	1.24E-3	3.40E-2	9.13E-2	1.70E-1	2.40E-1	1.24E-3	3.40E-2	9.13E-2	1.70E-1	2.40E-1	
	p = 5	LMS	RM	7.84E-3	8.71E-3	1.04E-2	1.76E-2	7.40E-2	1.76E-2	7.40E-2	3.45E-3	3.24E-3	3.10E-3	3.10E-3	3.57E-3	3.45E-3	3.24E-3	3.10E-3	3.10E-3	3.57E-3	
			RRR	6.05E-3	6.03E-3	5.91E-3	6.24E-3	6.25E-2	6.24E-3	6.24E-3	6.25E-2	3.32E-3	3.12E-3	2.93E-3	2.87E-3	3.29E-3	3.32E-3	3.12E-3	2.93E-3	2.87E-3	3.29E-3
GS		RM	5.05E-3	4.59E-3	4.25E-3	1.17E-2	1.23E-1	1.17E-2	1.17E-2	1.23E-1	2.24E-3	1.90E-3	1.59E-3	1.61E-3	1.80E-2	2.24E-3	1.90E-3	1.59E-3	1.61E-3	1.80E-2	
		RRR	1.27E-2	3.30E-2	6.99E-1	1.65E-1	3.03E+0	1.65E-1	1.65E-1	3.03E+0	2.55E-3	3.24E-3	6.44E-3	2.83E-2	1.19E-1	2.55E-3	3.24E-3	6.44E-3	2.83E-2	1.19E-1	
p = 10	ORR	RM	--	--	--	--	--	--	--	1.59E-3	1.49E-3	2.38E-1	3.10E-1	3.71E-1	1.59E-3	1.49E-3	2.38E-1	3.10E-1	3.71E-1		
		RRR	--	--	--	--	--	--	--	1.65E-3	7.47E-2	1.80E-1	2.79E-1	3.65E-1	1.65E-3	7.47E-2	1.80E-1	2.79E-1	3.65E-1		
	LMS	RM	--	--	--	--	--	--	--	4.46E-3	4.16E-3	4.25E-3	4.80E-3	9.52E-3	4.46E-3	4.16E-3	4.25E-3	4.80E-3	9.52E-3		
		RRR	--	--	--	--	--	--	--	4.05E-3	3.73E-3	3.78E-3	4.29E-3	8.99E-3	4.05E-3	3.73E-3	3.78E-3	4.29E-3	8.99E-3		
GS	RM	--	--	--	--	--	--	--	3.10E-3	2.64E-3	2.89E-3	1.54E-2	1.29E-1	3.10E-3	2.64E-3	2.89E-3	1.54E-2	1.29E-1			
	RRR	--	--	--	--	--	--	--	5.68E-3	1.02E-2	3.23E-2	1.04E-1	2.38E-1	5.68E-3	1.02E-2	3.23E-2	1.04E-1	2.38E-1			
p = 3	ORR	RM	5.29E-4	1.25E-1	1.95E-1	2.34E-1	2.61E-1	2.34E-1	2.34E-1	2.61E-1	1.60E-4	1.85E-1	2.35E-1	2.56E-1	2.72E-1	1.60E-4	1.85E-1	2.35E-1	2.56E-1	2.72E-1	
		RRR	5.50E-4	4.76E-2	1.41E-1	2.27E-1	2.72E-1	2.27E-1	2.27E-1	2.72E-1	1.68E-4	5.88E-2	1.93E-1	2.56E-1	2.83E-1	1.68E-4	5.88E-2	1.93E-1	2.56E-1	2.83E-1	
	LMS	RM	1.80E-3	1.58E-3	1.51E-3	1.46E-3	1.50E-3	1.46E-3	1.46E-3	1.50E-3	7.84E-4	6.80E-4	6.70E-4	6.78E-4	7.59E-4	7.84E-4	6.80E-4	6.70E-4	6.78E-4	7.59E-4	
		RRR	1.89E-3	1.67E-3	1.54E-3	1.47E-3	1.40E-3	1.47E-3	1.47E-3	1.40E-3	8.55E-4	7.08E-4	6.79E-4	6.55E-4	6.87E-4	8.55E-4	7.08E-4	6.79E-4	6.55E-4	6.87E-4	
	GS	RM	1.08E-3	8.05E-4	6.80E-4	6.49E-4	7.04E-3	6.49E-4	6.49E-4	7.04E-3	3.69E-4	2.42E-4	2.12E-4	2.08E-4	1.05E-3	3.69E-4	2.42E-4	2.12E-4	2.08E-4	1.05E-3	
		RRR	1.01E-3	1.21E-3	1.80E-3	3.78E-3	3.11E-2	3.78E-3	3.78E-3	3.11E-2	3.12E-4	3.95E-4	7.19E-4	1.56E-3	5.03E-3	3.12E-4	3.95E-4	7.19E-4	1.56E-3	5.03E-3	
	DR	RM	6.82E-4	9.59E-2	1.56E-1	2.00E-1	2.41E-1	2.00E-1	2.00E-1	2.41E-1	2.04E-4	1.32E-1	1.76E-1	2.06E-1	2.38E-1	2.04E-4	1.32E-1	1.76E-1	2.06E-1	2.38E-1	
		RRR	7.02E-4	3.28E-2	9.58E-2	1.74E-1	2.39E-1	1.74E-1	1.74E-1	2.39E-1	2.11E-4	3.80E-2	1.27E-1	1.90E-1	2.38E-1	2.11E-4	3.80E-2	1.27E-1	1.90E-1	2.38E-1	
	p = 5	LMS	RM	2.22E-3	2.08E-3	2.01E-3	2.08E-3	2.29E-3	2.08E-3	2.08E-3	2.29E-3	1.11E-3	1.04E-3	1.11E-3	1.30E-3	1.60E-3	1.11E-3	1.04E-3	1.11E-3	1.30E-3	1.60E-3
			RRR	2.30E-3	2.16E-3	2.04E-3	2.06E-3	2.16E-3	2.06E-3	2.06E-3	2.16E-3	1.17E-3	1.09E-3	1.15E-3	1.29E-3	1.57E-3	1.17E-3	1.09E-3	1.15E-3	1.29E-3	1.57E-3
GS		RM	1.35E-3	1.10E-3	8.87E-4	8.75E-4	3.76E-3	8.75E-4	8.75E-4	3.76E-3	4.29E-4	3.13E-4	2.69E-4	2.55E-4	4.32E-4	4.29E-4	3.13E-4	2.69E-4	2.55E-4	4.32E-4	
		RRR	1.33E-3	1.62E-3	2.32E-3	5.80E-3	5.34E-2	5.80E-3	5.80E-3	5.34E-2	3.96E-4	4.93E-4	7.49E-4	1.40E-3	3.89E-3	3.96E-4	4.93E-4	7.49E-4	1.40E-3	3.89E-3	
DR	RM	8.61E-4	1.59E-1	2.50E-1	3.12E-1	3.65E-1	3.12E-1	3.12E-1	3.65E-1	2.32E-4	2.13E-1	2.80E-1	3.22E-1	3.63E-1	2.32E-4	2.13E-1	2.80E-1	3.22E-1	3.63E-1		
	RRR	8.93E-4	7.18E-2	1.90E-1	2.83E-1	3.60E-1	2.83E-1	2.83E-1	3.60E-1	2.41E-4	9.55E-2	2.41E-1	3.02E-1	3.60E-1	2.41E-4	9.55E-2	2.41E-1	3.02E-1	3.60E-1		
p = 10	LMS	RM	2.82E-3	2.58E-3	2.73E-3	3.40E-3	5.57E-3	3.40E-3	3.40E-3	5.57E-3	1.72E-3	1.65E-3	1.97E-3	2.65E-3	4.45E-3	1.72E-3	1.65E-3	1.97E-3	2.65E-3	4.45E-3	
		RRR	2.83E-3	2.56E-3	2.69E-3	3.31E-3	5.41E-3	3.31E-3	3.31E-3	5.41E-3	1.77E-3	1.66E-3	1.97E-3	2.63E-3	4.42E-3	1.77E-3	1.66E-3	1.97E-3	2.63E-3	4.42E-3	
	GS	RM	1.72E-3	1.31E-3	1.03E-3	2.16E-3	5.13E-2	2.16E-3	2.16E-3	5.13E-2	5.21E-4	3.31E-4	2.69E-4	2.76E-4	5.45E-3	5.21E-4	3.31E-4	2.69E-4	2.76E-4	5.45E-3	
		RRR	1.89E-3	2.13E-3	3.62E-3	2.02E-2	1.17E-1	2.02E-2	2.02E-2	1.17E-1	4.66E-4	5.06E-4	7.31E-4	1.24E-3	3.95E-3	4.66E-4	5.06E-4	7.31E-4	1.24E-3	3.95E-3	

表 4: 実験結果：誤差項，説明変数項共に外れ値

n		20										50										
p	η	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	
		3	ORR	1.86E-3	1.75E+2	9.05E+2	4.01E+3	6.19E+2	9.10E-4	2.39E-1	8.11E+1	2.13E+1	1.48E+1	9.10E-4	2.39E-1	8.11E+1	2.13E+1	1.48E+1	9.10E-4	2.39E-1	8.11E+1	2.13E+1
1.93E-3	3.46E-2			1.62E-1	3.09E-1	3.31E-1	9.38E-4	2.32E-2	5.02E-2	1.00E-1	1.11E-1	9.38E-4	2.32E-2	5.02E-2	1.00E-1	1.11E-1	9.38E-4	2.32E-2	5.02E-2	1.00E-1	1.11E-1	
5.69E-3	5.73E-3			5.75E-3	5.51E-3	5.62E-3	2.81E-3	2.71E-3	2.50E-3	2.45E-3	2.38E-3	2.81E-3	2.71E-3	2.50E-3	2.45E-3	2.38E-3	2.81E-3	2.71E-3	2.50E-3	2.45E-3	2.38E-3	
RRR	4.84E-3		4.70E-3	4.73E-3	4.33E-3	4.37E-3	2.77E-3	2.69E-3	2.51E-3	2.43E-3	2.32E-3	2.77E-3	2.69E-3	2.51E-3	2.43E-3	2.32E-3	2.77E-3	2.69E-3	2.51E-3	2.43E-3	2.32E-3	
	3.52E-3		3.32E-3	3.19E-3	2.79E-3	2.64E-3	1.75E-3	1.58E-3	1.39E-3	1.28E-3	1.15E-3	1.75E-3	1.58E-3	1.39E-3	1.28E-3	1.15E-3	1.75E-3	1.58E-3	1.39E-3	1.28E-3	1.15E-3	
	4.65E-3		5.38E-3	7.30E-3	1.31E-2	6.60E-2	1.74E-3	1.81E-3	2.04E-3	2.21E-3	2.85E-3	1.74E-3	1.81E-3	2.04E-3	2.21E-3	2.85E-3	1.74E-3	1.81E-3	2.04E-3	2.21E-3	2.85E-3	
5	ORR		2.67E-3	7.34E+2	2.83E+1	9.62E+0	9.55E+1	1.19E-3	4.00E-1	7.33E+1	8.03E+1	8.89E+0	1.19E-3	4.00E-1	7.33E+1	8.03E+1	8.89E+0	1.19E-3	4.00E-1	7.33E+1	8.03E+1	8.89E+0
			2.76E-3	5.39E-2	7.71E-2	9.33E-2	1.23E-1	1.24E-3	1.26E-2	3.32E-2	5.08E-2	1.23E-1	1.24E-3	1.26E-2	3.32E-2	5.08E-2	1.23E-1	1.24E-3	1.26E-2	3.32E-2	5.08E-2	1.23E-1
			7.84E-3	7.96E-3	8.27E-3	8.87E-3	9.92E-3	3.45E-3	3.32E-3	3.20E-3	3.19E-3	3.14E-3	3.45E-3	3.32E-3	3.20E-3	3.19E-3	3.14E-3	3.45E-3	3.32E-3	3.20E-3	3.19E-3	3.14E-3
	RRR		6.05E-3	5.98E-3	5.96E-3	5.89E-3	5.77E-3	3.32E-3	3.22E-3	3.10E-3	3.03E-3	2.94E-3	3.32E-3	3.22E-3	3.10E-3	3.03E-3	2.94E-3	3.32E-3	3.22E-3	3.10E-3	3.03E-3	2.94E-3
			5.05E-3	4.79E-3	4.61E-3	4.35E-3	4.25E-3	2.24E-3	2.11E-3	1.91E-3	1.75E-3	1.57E-3	2.24E-3	2.11E-3	1.91E-3	1.75E-3	1.57E-3	2.24E-3	2.11E-3	1.91E-3	1.75E-3	1.57E-3
			1.27E-2	2.40E-2	1.59E-2	1.06E-1	2.12E+0	2.55E-3	2.73E-3	3.30E-3	3.86E-3	5.74E-3	2.55E-3	2.73E-3	3.30E-3	3.86E-3	5.74E-3	2.55E-3	2.73E-3	3.30E-3	3.86E-3	5.74E-3
	10	ORR	-	-	-	-	-	1.59E-3	2.67E-1	1.85E+2	7.68E+3	8.85E+3	1.59E-3	2.67E-1	1.85E+2	7.68E+3	8.85E+3	1.59E-3	2.67E-1	1.85E+2	7.68E+3	8.85E+3
			-	-	-	-	-	1.65E-3	2.44E-2	7.83E-2	7.86E+3	3.35E-1	1.65E-3	2.44E-2	7.83E-2	7.86E+3	3.35E-1	1.65E-3	2.44E-2	7.83E-2	7.86E+3	3.35E-1
			-	-	-	-	-	4.46E-3	4.31E-3	4.22E-3	4.13E-3	4.21E-3	4.46E-3	4.31E-3	4.22E-3	4.13E-3	4.21E-3	4.46E-3	4.31E-3	4.22E-3	4.13E-3	4.21E-3
		RRR	-	-	-	-	-	4.05E-3	3.93E-3	3.74E-3	3.72E-3	3.75E-3	4.05E-3	3.93E-3	3.74E-3	3.72E-3	3.75E-3	4.05E-3	3.93E-3	3.74E-3	3.72E-3	3.75E-3
			-	-	-	-	-	3.10E-3	2.91E-3	2.62E-3	2.41E-3	2.64E-3	3.10E-3	2.91E-3	2.62E-3	2.41E-3	2.64E-3	3.10E-3	2.91E-3	2.62E-3	2.41E-3	2.64E-3
			-	-	-	-	-	5.68E-3	6.80E-3	9.82E-3	1.50E-2	3.25E-2	5.68E-3	6.80E-3	9.82E-3	1.50E-2	3.25E-2	5.68E-3	6.80E-3	9.82E-3	1.50E-2	3.25E-2
3		ORR	5.29E-4	3.45E+2	8.71E+0	1.06E+1	1.45E+1	1.60E-4	1.64E+0	3.24E+2	2.17E+2	1.54E+1	1.60E-4	1.64E+0	3.24E+2	2.17E+2	1.54E+1	1.60E-4	1.64E+0	3.24E+2	2.17E+2	1.54E+1
			5.50E-4	2.07E-2	5.44E-2	8.27E-2	1.20E-1	1.68E-4	2.03E-2	5.42E-2	1.07E-1	1.66E-1	1.68E-4	2.03E-2	5.42E-2	1.07E-1	1.66E-1	1.68E-4	2.03E-2	5.42E-2	1.07E-1	1.66E-1
			1.80E-3	1.66E-3	1.57E-3	1.55E-3	1.53E-3	7.84E-4	6.91E-4	6.71E-4	6.52E-4	6.57E-4	7.84E-4	6.91E-4	6.71E-4	6.52E-4	6.57E-4	7.84E-4	6.91E-4	6.71E-4	6.52E-4	6.57E-4
		RRR	1.89E-3	1.74E-3	1.64E-3	1.62E-3	1.53E-3	8.55E-4	7.47E-4	6.97E-4	6.84E-4	6.72E-4	8.55E-4	7.47E-4	6.97E-4	6.84E-4	6.72E-4	8.55E-4	7.47E-4	6.97E-4	6.84E-4	6.72E-4
			1.08E-3	9.13E-4	7.98E-4	7.13E-4	6.74E-4	3.69E-4	2.78E-4	2.38E-4	2.15E-4	2.10E-4	3.69E-4	2.78E-4	2.38E-4	2.15E-4	2.10E-4	3.69E-4	2.78E-4	2.38E-4	2.15E-4	2.10E-4
			1.01E-3	1.04E-3	1.15E-3	1.27E-3	1.53E-3	3.12E-4	3.09E-4	3.60E-4	4.43E-4	5.63E-4	3.12E-4	3.09E-4	3.60E-4	4.43E-4	5.63E-4	3.12E-4	3.09E-4	3.60E-4	4.43E-4	5.63E-4
	5	ORR	6.82E-4	2.76E+0	4.56E+0	5.48E+0	6.84E+0	2.04E-4	1.09E+1	3.86E+0	2.63E+1	4.94E+1	2.04E-4	1.09E+1	3.86E+0	2.63E+1	4.94E+1	2.04E-4	1.09E+1	3.86E+0	2.63E+1	4.94E+1
			7.02E-4	1.43E-2	3.25E-2	5.55E-2	8.73E-2	2.11E-4	1.34E-2	3.55E-2	7.06E-2	1.11E-1	2.11E-4	1.34E-2	3.55E-2	7.06E-2	1.11E-1	2.11E-4	1.34E-2	3.55E-2	7.06E-2	1.11E-1
			2.22E-3	2.11E-3	2.09E-3	2.04E-3	2.01E-3	1.11E-3	1.04E-3	1.04E-3	1.06E-3	1.12E-3	1.11E-3	1.04E-3	1.04E-3	1.06E-3	1.12E-3	1.11E-3	1.04E-3	1.04E-3	1.06E-3	1.12E-3
		RRR	2.30E-3	2.18E-3	2.17E-3	2.10E-3	2.06E-3	1.17E-3	1.09E-3	1.10E-3	1.11E-3	1.15E-3	1.17E-3	1.09E-3	1.10E-3	1.11E-3	1.15E-3	1.17E-3	1.09E-3	1.10E-3	1.11E-3	1.15E-3
			1.35E-3	1.22E-3	1.09E-3	9.73E-4	8.77E-4	4.29E-4	3.61E-4	3.12E-4	2.81E-4	2.69E-4	4.29E-4	3.61E-4	3.12E-4	2.81E-4	2.69E-4	4.29E-4	3.61E-4	3.12E-4	2.81E-4	2.69E-4
			1.33E-3	1.43E-3	1.58E-3	1.79E-3	2.13E-3	3.96E-4	4.16E-4	4.70E-4	5.53E-4	6.72E-4	3.96E-4	4.16E-4	4.70E-4	5.53E-4	6.72E-4	3.96E-4	4.16E-4	4.70E-4	5.53E-4	6.72E-4
10		ORR	8.61E-4	1.48E+0	1.53E+1	6.83E+0	2.47E+1	2.32E-4	6.01E+0	7.56E+0	2.75E+1	2.34E+4	2.32E-4	6.01E+0	7.56E+0	2.75E+1	2.34E+4	2.32E-4	6.01E+0	7.56E+0	2.75E+1	2.34E+4
			8.93E-4	3.14E-2	3.23E+0	1.26E-1	2.40E+0	2.41E-4	2.94E-2	9.10E-2	1.70E-1	2.41E-1	2.41E-4	2.94E-2	9.10E-2	1.70E-1	2.41E-1	2.41E-4	2.94E-2	9.10E-2	1.70E-1	2.41E-1
			2.82E-3	2.61E-3	2.57E-3	2.59E-3	2.74E-3	1.72E-3	1.58E-3	1.63E-3	1.75E-3	1.98E-3	1.72E-3	1.58E-3	1.63E-3	1.75E-3	1.98E-3	1.72E-3	1.58E-3	1.63E-3	1.75E-3	1.98E-3
		RRR	2.83E-3	2.60E-3	2.53E-3	2.59E-3	2.73E-3	1.77E-3	1.61E-3	1.67E-3	1.77E-3	1.98E-3	1.77E-3	1.61E-3	1.67E-3	1.77E-3	1.98E-3	1.77E-3	1.61E-3	1.67E-3	1.77E-3	1.98E-3
			1.72E-3	1.51E-3	1.31E-3	1.16E-3	1.04E-3	5.21E-4	3.96E-4	3.31E-4	3.03E-4	2.68E-4	5.21E-4	3.96E-4	3.31E-4	3.03E-4	2.68E-4	5.21E-4	3.96E-4	3.31E-4	3.03E-4	2.68E-4
			1.89E-3	1.95E-3	2.12E-3	2.50E-3	3.43E-3	4.66E-4	4.59E-4	4.92E-4	5.74E-4	7.01E-4	4.66E-4	4.59E-4	4.92E-4	5.74E-4	7.01E-4	4.66E-4	4.59E-4	4.92E-4	5.74E-4	7.01E-4

参考文献

- Croux, C., Rousseeuw, P. J. and Hössjer, O. (1994). Generalized S-Estimators, *Journal of the American Statistical Association.*, **89**, 1271-1281.
- Hampel, F. R. (1975). Beyond Location Parameters: Robust Concepts and Methods (with Discussion). *Bulletin of the ISI.*, **46**, 375-391.
- Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970a). Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems, *Technometrics.*, **12**, 55-67.
- Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970b). Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems, *Technometrics.*, **12**, 69-82.
- Huber, P. J. (1964). Robust Estimation of Location Parameters, *Annals of Mathematical Statistics.*, **35**, 73-101.
- 金子元紀 (2007). 線形回帰におけるロバスト推定量の研究, 南山大学数理情報研究科修士論文.
- Kibria, B. M. G. (2003). Performance of Some New Ridge Regression Estimators, *Communications in Statistics—Theory and Methods.*, **32**, 419-435.
- 大見俊司・安藤雅和・木村美善 (2007). 最深回帰推定量とその R による実用化, 南山大学紀要「アカデミア」数理情報編, **7**, 61-73.
- Rousseeuw, P. J. (1984). Least Median of Squares Regression, *Journal of the American Statistical Association.*, **79**, 871-880.
- Rousseeuw, P. J. and Hubert, M. (1999). Regression Depth, *Journal of the American Statistical Association.*, **94**, 388-402.
- Silvapulle, M. J. (1991). Robust Ridge Regression Based on an M-Estimator, *Australian Journal of Statistics.*, **33**, 319-333.